Современные проблемы
МАТЕМАТИКИ

А. В. Погорелов

ИЗГИБАНИЕ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1951

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1951 ЛЕНИНГРАД

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ИЗГИБАНИЕ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1951 ЛЕНИНГРАД

11-5-4

Монография посвящена изложению некоторых основных вопросов геометрии выпуклых поверхностей. Исследования автора, частично вошедшие в книгу, удостоены в 1950 г. Сталинской премии.

Книга рассчитана на научных работников в области математики, аспирантов и студентов старших курсов физико-математических факультетов.

От читателя требуется общее знакомство с теорией выпуклых поверхностей (например, по книге А. Д. Александрова «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей», Гостехиздат, 1948) и с дифференциальной геометрией в объёме университетского курса.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Поверхности F_1 и F_2 называются изометричными, если между ними можно установить взаимнооднозначное и непрерывное точечное соответствие, при котором соответствующие кривые этих поверхностей имеют одинаковые длины.

Относительно поверхности, для которой существуют поверхности изометричные, но не равные ей, говорят, что она изгибаема.

Кроме того, существует понятие непрерывного изгибания. Под непрерывным изгибанием понимают такую непрерывную деформацию поверхности, при которой сохраняются длины кривых на ней. При этом, естественно, предполагается, что деформация поверхности не сводится к простому перемещению её в пространстве.

Проблема изгибания поверхностей была предметом многочисленных исследований геометров 19—20 вв. Большинство этих исследований было посвящено вопросу изгибания поверхности «в малом», т. е. изгибанию достаточно малого куска поверхности, а также изгибанию некоторых специальных случаев поверхности и исследованию некоторых частных случаев изгибания. Один из наиболее общих результатов, касающихся изгибания поверхностей «в малом», был получен Дарбу. Дарбу доказал, что достаточно малая окрестность произвольной точки аналитической поверхности допускает изгибания. Другой общий результат получен Е. Е. Леви в 1908 г. Леви доказал, что если два достаточно малых куска аналитической поверхности с не обращающейся в нуль гауссовой кривизной изометричны, то один из них можно перевести в другой непрерывным изгибанием с возможным добавлением зеркального отражения в случае, если гауссова кривизна положительна. Эти результаты в самое последнее время были существенно дополнены теоремой Н. В. Ефимова о том, что существуют аналитические поверхности с параболическими точками, не допускающие непрерывных изгибаний даже для сколь угодно малой окрестности параболической точки [9] *).

Среди частных случаев изгибания поверхности особенно хорошо исследованы так называемые изгибания на главном основании. Это — такие изгибания поверхности, при которых сохраняется некоторая сопряжённая сеть. Начало исследования изгибаний на главном основании было положено К. М. Петерсоном в 1866 г. Эти исследования были продолжены в многочисленных работах преимущественно русских и советских геометров (С. С. Бюшгенс, С. П. Фиников, Н. Н. Лузин и др.).

Достаточно общие результаты, касающиеся изгибания целой поверхности, а не сколь угодно малой её части, были получены только в конце девятнадцатого века. Так, Либман и Минковский в 1899 г. доказали неизгибаемость сферы. Позже Либман доказал невозможность непрерывных изгибаний любой замкнутой выпуклой поверхности. В 1927 г. С. Э. Кон-Фоссен доказал однозначную определённость замкнутых регулярных поверхностей, т. е. невозможность изгибаний таких поверхностей без предположения о непрерывности. В 1938 г. А. Д. Александров исследовал замкнутые поверхности типа T. Это — поверхности, определяемые следующими свойствами:

1) T-поверхность имеет области положительной и отрицательной кривизны, отделённые друг от друга кусочно гладкими кривыми;

2) гауссова кривизна обращается в нуль на этих кривых и, может быть, внутри областей, где она не меняет знака, но лишь на нигде не плотном множестве точек;

3) полная кривизна областей положительной кривизны равна 4π.

А. Д. Александров доказал, что если две аналитические T-поверхности изометричны, то они равны.

В 1941 г. А. Д. Александров доказал существование замкнутого выпуклого многогранника, реализующего заданную на сфере многогранную метрику, и этой работой поло-

*) Цифры, стоящие в скобках внутри текста, указывают порядковый номер по списку литературы, помещённому на стр. 183.

жил основу новой синтетической теории выпуклых поверхностей. Новые методы, предложенные А. Д. Александровым, позволили С. П. Оловянишникову в 1941 г. доказать изгибаемость бесконечных выпуклых поверхностей с полной кривизной, меньшей 2π, и найти все их изгибания.

В 1948 г. автор доказал однозначную определённость замкнутых выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны, выпуклых шапочек в классе шапочек, широкого класса бесконечных выпуклых поверхностей с полной кривизной 2π и бесконечных выпуклых поверхностей с полной кривизной, меньшей 2π, при фиксированных данных Оловянишникова.

В 1949 г. автор доказал регулярность выпуклых поверхностей с регулярной метрикой и положительной кривизной, откуда, в частности, следует, что регулярные поверхности не допускают иных изгибаний, кроме регулярных.

В самое последнее время автор доказал однозначную определённость *общих* замкнутых выпуклых поверхностей.

* * *

Одним из самых сильных средств исследования изгибаний выпуклых поверхностей является метод склеивания, основанный на следующей замечательной теореме (так называемая «теорема о склеивании»), принадлежащей А. Д. Александрову.

Пусть F_1 и F_2 — две выпуклые поверхности, гомеоморфные кругу, ограниченные кривыми γ_1 и γ_2 одинаковой длины. Пусть, далее, между кривыми γ_1 и γ_2 установлено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее длины дуг этих кривых, и в соответствующих точках сумма геодезических кривизн кривых γ_1 и γ_2 на поверхностях F_1 и F_2 неотрицательна. Тогда существует замкнутая выпуклая поверхность F, состоящая из двух частей, одна из которых изометрична F_1, а другая — F_2.

Покажем, например, как с помощью этой теоремы может быть доказана изгибаемость сферического сегмента, большего полусферы. Для этого малой деформацией переведём круг, лежащий в основании сегмента, в область, ограниченную эллипсом с той же длиной, что и окружность круга. Затем применяем теорему о склеивании к сферическому сегменту и области, ограниченной эллипсом. Замкнутая поверхность, которая при этом получается, содержит область, изометричную сегменту, но, очевидно, не равную ему.

С точки зрения классической дифференциальной геометрии, которая рассматривает только регулярные поверхности, данное выше доказательство изгибаемости сферического сегмента не вполне удовлетворительно, так как неизвестно, будет ли регулярной построенная нами выпуклая поверхность, изометричная сегменту.

Мы покажем, что регулярная выпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной, которой, в частности, является сферический сегмент, не допускает иных изгибаний, кроме регулярных. Поэтому метод «склеивания» А. Д. Александрова является методом классической дифференциальной геометрии.

Краткому изложению основных результатов, изложенных в книге, мы предпошлём определение основных понятий.

Выпуклым телом в трёхмерном евклидовом пространстве называется замкнутое множество, не лежащее в одной плоскости, которое вместе с любыми двумя его точками содержит также любую точку соединяющего их отрезка. Шар, куб, тетраэдр, часть пространства, расположенная по одну сторону плоскости, — всё это выпуклые тела́.

Любое связное открытое множество на границе выпуклого тела называется выпуклой поверхностью. Вся граница выпуклого тела называется полной выпуклой поверхностью.

Среди выпуклых поверхностей важным классом являются так называемые регулярные выпуклые поверхности. Выпуклая поверхность называется регулярной (k раз дифференцируемой), если в окрестности каждой её точки могут быть введены локальные координаты u, v так, что радиус-вектор $r(u, v)$ точки поверхности как функция этих координат будет регулярной (k раз дифференцируемой) функцией.

Длина кривой γ, заданной на регулярной выпуклой поверхности $r = r(u, v)$ уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, равна

$$\int\limits_{\gamma} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt,$$

где E, F, G соответственно равны $(r_u r_u)$, $(r_u r_v)$, $(r_v r_v)$.

Может случиться, что хотя поверхность и не регулярна, но на ней в окрестности каждой её точки могут быть введены локальные координаты u, v так, что длина каждой кривой, заданной в этой окрестности уравнениями $u=u(t)$, $v=v(t)$, равна

$$\int_\gamma \sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\,dt,$$

где E, F и G — некоторые функции координат u, v. Если при этом функции E, F и G будут k раз дифференцируемыми (аналитическими) функциями u и v, то будем говорить, что поверхность имеет k раз дифференцируемую (аналитическую) метрику.

Таким образом, k раз дифференцируемая (аналитическая) поверхность F имеет по крайней мере $k-1$ раз дифференцируемую метрику. Более того, метрика каждой поверхности, изометричной F, будет по крайней мере $k-1$ раз дифференцируемой (соответственно аналитической).

Гораздо труднее сделать какие-либо заключения о регулярности поверхности, исходя из предположения о регулярности её метрики. Соответствующую теорему мы получаем в главе пятой, в то время как предшествующие главы, не лишённые, правда, и самостоятельного интереса, дают лишь вспомогательный материал для доказательства этого основного результата.

Теорема 1. *Если выпуклая поверхность имеет регулярную (k раз дифференцируемую, $k \geqslant 5$) метрику и положительную гауссову кривизну, то сама поверхность регулярна (по крайней мере $k-1$ раз дифференцируема). Если же метрика поверхности аналитическая, то поверхность аналитическая.*

Простым следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Если F — дифференцируемая k раз поверхность ($k>5$) с положительной гауссовой кривизной, то все выпуклые поверхности, полученные из F путём изгибания, дифференцируемы по крайней мере $k-2$ раза. Если же поверхность F аналитическая, то все выпуклые поверхности, полученные изгибанием из F, — аналитические.*

Применением теоремы 1 и «теоремы о склеивании» А. Д. Александрова получается

Теорема 3. *Если F_1 и F_2 — две изометричные одинаково ориентированные выпуклые поверхности с положительной гауссовой кривизной, из коих хотя бы одна k раз дифференцируема ($k > 5$), то у каждой точки P_1 поверхности F_1 есть окрестность ω_1, которую непрерывным изгибанием с сохранением $k-2$ кратной дифференцируемости можно перевести в соответствующую по изометрии область ω_2 на поверхности F_2.*

Как следствие теоремы 1 и теоремы А. Д. Александрова о реализуемости в малом выпуклой метрики выпуклой поверхностью получается

Теорема 4. *Если в области G плоскости u, v задана линейным элементом*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

k раз дифференцируемая метрика ($k \geqslant 5$) с положительной кривизной, то каждая точка области G имеет окрестность, в которой заданную метрику можно реализовать $k-1$ раз дифференцируемой поверхностью. Более того, любая выпуклая поверхность с линейным элементом ds^2 дифференцируема $k-1$ раз.

Из теоремы 1 и теоремы А. Д. Александрова о существовании замкнутой выпуклой поверхности, реализующей заданную на сфере выпуклую метрику, следует теорема Вейля.

Теорема 5. *Аналитическая метрика с положительной гауссовой кривизной, заданная на сфере, реализуема аналитической замкнутой выпуклой поверхностью.*

Теорема 1 значительно упрощает исследование изгибаний полных выпуклых регулярных поверхностей с положительной гауссовой кривизной *в классе всех выпуклых поверхностей.* При этом получаются теоремы 6, 7, 8.

Теорема 6. *Замкнутые регулярные выпуклые поверхности с положительной гауссовой кривизной неизгибаемы.*

Теорема 7. *Пусть F — бесконечная выпуклая поверхность с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной, O — фиксированная точка на ней, $K(R)$ — геодезический круг на поверхности F радиуса R с центром в точке O, $\varphi(R)$ — полная кривизна круга $K(R)$, $l(R)$ — длина наименьшей кривой на поверхности, охватывающей круг $K(R)$.*

Тогда, если $[2\pi - \varphi(R)]\, l(R) \to 0$, *когда* $R \to \infty$, *то поверхность* F *не допускает изгибаний.*

Теорема 8. *Пусть* F_1 *и* F_2 — *бесконечные изометричные одинаково ориентированные выпуклые поверхности с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной, сферические изображения которых суть области, ограниченные гладкими кривыми.*

Тогда существует непрерывное изгибание поверхности F_1 *в поверхность* F_2.

При доказательстве этой теоремы существенно используется теорема С. П. Оловянишникова *) об изгибании общих выпуклых поверхностей, полная кривизна которых меньше 2π.

Кроме перечисленных результатов, относящихся собственно к вопросу изгибания поверхностей, в книге излагается ряд других результатов, играющих вспомогательную роль, но представляющих, повидимому, и самостоятельный интерес. Так, например, в главе четвёртой доказаны следующие теоремы.

Теорема 9. *Пусть* F — *регулярная выпуклая шапочка, регулярно продолжаемая за её границу, причём геодезическая кривизна кривой, ограничивающей шапочку, существенно положительна, а гауссова кривизна шапочки всюду больше* $k_0 > 0$.

Тогда для кривизны нормальных сечений шапочки, а также для тангенса угла наклона её касательных плоскостей к плоскости её основания может быть дана оценка в зависимости только от величин, определяемых внутренней геометрией шапочки **).

Теорема 10. *Пусть* F — *регулярная выпуклая шапочка, гауссова кривизна которой всюду больше* $k_0 > 0$, *а углы, образуемые её касательными с плоскостью её основания, всюду меньше* $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

Тогда для кривизны нормальных сечений шапочки в точке P *могут быть указаны оценки в зависимости только от величин, определяемых внутренней геометрией*

*) С. П. Оловянишников — ленинградский геометр, погиб на фронте Отечественной войны в 1941 г.

**) Выпуклой шапочкой называется выпуклая поверхность с плоским краем, однозначно проектирующаяся на плоскость края, например, сферический сегмент, меньший полусферы.

*шапочки, наибольшего угла, образуемого касательными плоскостями шапочки с плоскостью её основания, и расстояния точки P от плоскости основания шапочки**).

Теорема 9 даёт возможность для малой выпуклой области ω, ограниченной аналитическим контуром на выпуклой поверхности с аналитической метрикой и положительной гауссовой кривизной, построить изометричную ей аналитическую шапочку. Теорема 10 позволяет затем это сделать без предположения об аналитичности контура, ограничивающего область ω, и сводит, таким образом, вопрос об аналитичности выпуклой поверхности с аналитической метрикой к вопросу неизгибаемости выпуклых шапочек в классе шапочек, рассмотренному в главе третьей.

При доказательстве теоремы о регулярности поверхности с регулярной метрикой важную роль играют не лишённые и самостоятельного интереса следующие предложения:

Теорема 11. *Пусть $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$ — уравнение в частных производных эллиптического типа, $z(x, y)$ — его решение в области G плоскости xy.*

Тогда для модулей третьих производных функции $z(x, y)$ в точке (x, y) области G могут быть получены оценки в зависимости от верхней грани модулей функции $z(x, y)$ и её производных второго порядка, верхней грани модулей частных производных функции F до второго порядка, верхней грани модулей величин $\frac{1}{F_r}$, $\frac{1}{F_t}$, $\frac{1}{F_rF_t-\frac{1}{4}F_s^2}$ и расстояния точки (x, y) от границы области G.

Теорема 12. *Пусть $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$ — уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа, $z=z(x, y)$ — его трижды непрерывно дифференцируемое решение в области G.*

Тогда, если функция F дифференцируема n раз по всем аргументам, то функция $z(x, y)$ в области G дифференцируема по крайней мере $n+1$ раз.

---

*) В этой теореме важно то, что относительно края шапочки не делается никаких предположений.

Доказательство теорем 11 и 12 основано на работах С. Н. Бернштейна и Шаудера по уравнениям с частными производными второго порядка эллиптического типа.

Несколько слов о порядке изложения.

В главе первой изложен ряд теорем о геодезических на выпуклой поверхности, которые в дальнейшем неоднократно применяются.

В главе второй доказаны некоторые свойства кривизны выпуклых поверхностей. Здесь приведён весь необходимый материал для доказательства неизгибаемости выпуклых шапочек с регулярной метрикой в классе шапочек, которое содержится в главе III.

В главе четвёртой получаются оценки кривизны нормальных сечений поверхности и, таким образом, подготавливается доказательство основной теоремы — о регулярности поверхности с регулярной метрикой, которое помещено в пятой главе.

В главе шестой приведены основные теоремы существования выпуклых поверхностей с данной метрикой.

Седьмая глава содержит ряд теорем относительно изгибания регулярных выпуклых поверхностей.

В дополнениях I и II приводится доказательство регулярности решений уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа, и получаются оценки для производных решения такого уравнения.

Для понимания книги необходимо самое общее знакомство с теорией выпуклых поверхностей А. Д. Александрова и дифференциальной геометрией в объёме университетского курса.

ГЛАВА I

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ НА ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Выпуклые тела и выпуклые поверхности

В этом параграфе мы приводим основные свойства выпуклых тел и выпуклых поверхностей. Их доказательство довольно просто и может быть рекомендовано в качестве полезного упражнения. При необходимости можно воспользоваться книгой А. Д. Александрова «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей» *).

Замкнутое множество точек трёхмерного евклидова пространства, не лежащее в одной плоскости, называется *выпуклым телом*, если вместе с любыми двумя его точками оно содержит все точки соединяющего их прямолинейного отрезка. Точка X выпуклого тела K называется *внутренней*, если все точки пространства, достаточно близкие к точке X, принадлежат телу K. Если же найдутся сколь угодно близкие к точке X точки пространства, не принадлежащие телу K, то X называется *граничной точкой*.

Граница выпуклого тела называется *полной выпуклой поверхностью*. Существует только три топологических типа связных полных выпуклых поверхностей: 1) поверхности, гомеоморфные сфере, например, куб, сфера, эллипсоид, 2) поверхности, гомеоморфные плоскости, например, эллиптический параболоид, 3) поверхности, гомеоморфные круговому цилиндру, причём все такие поверхности суть сами цилиндры.

---

*) А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1948.

Полные выпуклые поверхности, гомеоморфные сфере, всегда конечны; обратно, конечная полная выпуклая поверхность гомеоморфна сфере. Эти поверхности называются *замкнутыми*.

Бесконечная выпуклая поверхность гомеоморфна или плоскости, или прямому круговому цилиндру. Обратно, полная выпуклая поверхность, гомеоморфная плоскости или прямому круговому цилиндру, бесконечна.

Любая область на полной выпуклой поверхности называется *выпуклой поверхностью*. Таким образом, выпуклая поверхность всегда является частью некоторой полной выпуклой поверхности. Среди выпуклых поверхностей с краем особенно важным классом являются так называемые *выпуклые шапочки*. Выпуклой шапочкой называется выпуклая поверхность с плоским краем, однозначно проектирующаяся на плоскость края. Сферический сегмент, не превышающий полусферы, может служить примером выпуклой шапочки.

Плоскость, содержащая хотя бы одну точку поверхности и такая, что вся поверхность находится по одну сторону от неё, называется *опорной плоскостью*. Через каждую точку выпуклой поверхности можно провести хотя бы одну опорную плоскость.

Если из точки X выпуклой поверхности F провести все полупрямые внутрь тела, на границе которого лежит поверхность F, то они заполнят некоторый выпуклый конус, граница которого называется *касательным конусом* поверхности F в точке X. Этот конус, вообще говоря, может вырождаться в двугранный угол или плоскость. Соответственно этому точки поверхности подразделяются на *конические*, *ребристые* и *гладкие*. На прямом круговом конусе можно найти представителей всех таких точек. Выпуклая поверхность, у которой все точки гладкие, называется *гладкой* выпуклой поверхностью.

Опорная плоскость касательного конуса выпуклой поверхности в его вершине является опорной плоскостью поверхности. Обратно, опорная плоскость к поверхности в точке X является опорной плоскостью касательного конуса поверхности в этой точке.

Касательному конусу выпуклой поверхности F в точке X можно дать другое равнозначное, но для наших целей более удобное определение.

2 Зак. 2666. А. В. Погорелов.

Пусть $F_n(X)$ — выпуклая поверхность, полученная из F преобразованием подобия относительно центра X с коэффициентом подобия n. Последовательность поверхностей $F_n(X)$ при $n \to \infty$ сходится к выпуклому конусу, который оказывается касательным конусом поверхности F в точке X.

Пусть M — любое множество точек на выпуклой поверхности F. Концы единичных векторов внешних нормалей к опорным плоскостям поверхности F в точках множества M, отложенные из одной точки O, образуют некоторое множество $\omega(M)$ на единичной сфере с центром O. Множество $\omega(M)$ называется *сферическим изображением* множества M.

Сферическое изображение точки X выпуклой поверхности есть выпуклая область, если точка X коническая, дуга большого круга, меньшая полуокружности, если точка X ребристая, и одна точка, если точка X гладкая.

Сферическое изображение замкнутого множества является замкнутым множеством.

Если M_0 — замкнутое множество на выпуклой поверхности и M_n — последовательность множеств, сходящихся к M_0, то при достаточно большом n сферические изображения $\omega(M_n)$ множеств M_n попадают в сколь угодно малую окрестность сферического изображения $\omega(M_0)$ множества M_0.

Любые две точки на выпуклой поверхности можно соединить спрямляемой кривой.

Расстоянием между точками X и Y на выпуклой поверхности F называется точная нижняя грань длин кривых, соединяющих точки X и Y на F. Кривая на поверхности F, соединяющая точки X и Y, называется кратчайшей, если её длина равна расстоянию между точками X и Y на поверхности. Если для каждой точки X кривой γ, исключая её концы, можно указать отрезок этой кривой, содержащий точку X в качестве внутренней точки и являющийся кратчайшей, то кривая γ называется *геодезической*.

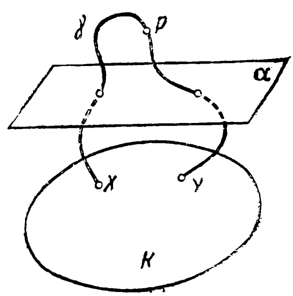
Вообще говоря, не всякие две точки выпуклой поверхности можно соединить кратчайшей. Но у всякой точки X есть достаточно малая окрестность такая, что каждую точку этой окрестности можно соединить кратчайшей с точкой X. На связной полной выпуклой поверхности любые две точки можно соединить кратчайшей.

Две выпуклые поверхности называются *изометричными*, если между ними может быть установлено взаимнооднозначное точечное соответствие, при котором соответствующие кривые на этих поверхностях имеют одинаковые длины. Две выпуклые поверхности изометричны тогда и только тогда, когда между ними можно установить взаимнооднозначное точечное соответствие, при котором расстояния между соответствующими точками на поверхностях одинаковы.

§ 2. Теорема Буземана и Феллера

В теории выпуклых поверхностей важную роль играет следующая теорема Буземана и Феллера [2].

Теорема 1. *Пусть F — полная выпуклая поверхность, ограничивающая тело K, и γ — кривая с концами X и Y, лежащими на поверхности, не содержащая внутренних точек тела K. Тогда длина $l(\gamma)$ кривой γ не меньше расстояния $\rho(X, Y)$ между её концами на поверхности и больше этого расстояния, если кривая γ не лежит целиком на поверхности.*



Черт. 1.

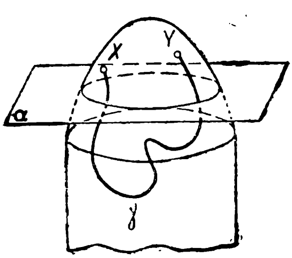
Доказательство. Если кривая γ не лежит целиком на поверхности, то существует кривая $\bar{\gamma}$ с концами в точках X и Y, тоже не содержащая внутренних точек тела K, такая, что её длина $l(\bar{\gamma})$ меньше $l(\gamma)$. Действительно, пусть P — точка кривой γ, лежащая вне поверхности. Тогда существует плоскость α, разделяющая точку P и тело K (черт. 1). Заменим дугу кривой γ с концами на плоскости α, содержащую точку P, её проекцией на плоскость α. Полученная при этом кривая $\bar{\gamma}$, соединяющая точки X и Y, тоже не содержит внутренних точек тела K, но длина её меньше, чем длина кривой γ.

Обозначим через l_0 точную нижнюю грань длин кривых, соединяющих точки X и Y и не содержащих внутренних точек тела K. Существует последовательность таких кривых, по длине сходящихся к l_0. Из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Предельная кривая γ_0 этой подпоследовательности имеет длину l_0 и должна лежать на поверхности F, так как в противном случае можно было бы указать кривую $\bar{\gamma}_0$, длина которой была бы меньше l_0. Поскольку кривая γ_0 лежит на поверхности F, то длина её не меньше расстояния между точками X и Y на F, которое является точной нижней гранью длин кривых, соединяющих точки X и Y на F. Следовательно, и длина кривой γ, будучи не меньше l_0, должна быть не меньше $\rho(X, Y)$. Если же кривая γ не лежит целиком на поверхности, то её длина строго больше $l_0 \geqslant \rho(X, Y)$, так как среди кривых, соединяющих точки X и Y и не содержащих внутренних точек тела K, существуют кривые, длина которых меньше $l(\gamma)$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Любые две точки X и Y выпуклой шапочки ω можно соединить кратчайшей.*

Доказательство. Дополним шапочку ω до полной выпуклой поверхности F полуцилиндром Z с образующими, перпендикулярными к основанию шапочки ω (черт. 2). На поверхности F точки X и Y можно соединить кратчайшей γ. Покажем, что она расположена на шапочке ω. Действительно, допустим, что γ пересекает границу шапочки. Проведём плоскость α, параллельную основанию шапочки и отделяющую точки X и Y от границы шапочки. Заменим теперь ту часть кривой γ, которая лежит ниже плоскости α, её проекцией на плоскость α. Тогда получим кривую $\bar{\gamma}$, соединяющую точки X и Y поверхности F, не содержащую внутренних точек тела, ограниченного этой поверхностью, с длиной, меньшей длины кривой γ. Но это исключается теоремой 1.

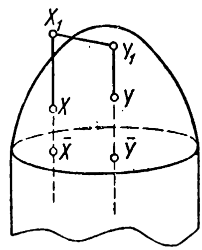


Черт. 2.

Теорема доказана.

Расстояние между любыми двумя точками X и Y шапочки ω меньше $\frac{l}{2} + 2h$, где l — длина кривой γ, ограничивающей шапочку, а h — высота шапочки.

Дополнив шапочку ω до полной выпуклой поверхности F, как в доказательстве теоремы 2, проведём две прямые через точки X и Y перпендикулярно к плоскости основания шапочки (черт. 3). Они пересекут основание шапочки в точках $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. Возьмём теперь точки X_1 и Y_1 на полупрямых $\bar{X}X$, $\bar{Y}Y$ на расстоянии h от $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ соответственно. Ломаная XX_1Y_1Y не содержит внутренних точек тела, ограниченного поверхностью F. Поэтому длина её не меньше расстояния между точками X и Y на F, равного расстоянию между этими точками на ω. Так как длина отрезка X_1Y_1, равная длине $\bar{X}\bar{Y}$, меньше половины длины кривой γ, то расстояние между точками X и Y на шапочке ω действительно меньше $\frac{l}{2}+2h$.



Черт. 3.

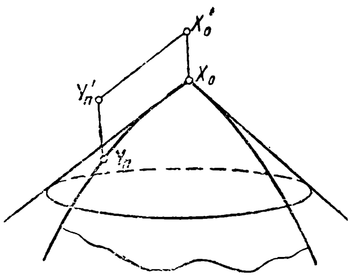
Теорема 3. *Пусть F — выпуклая поверхность и X_0 — точка на ней, X — произвольная точка поверхности, $\rho(X)$ и $\delta(X)$ — расстояния между точками X и X_0 на поверхности и в пространстве соответственно. Тогда*

$$\frac{\rho(X)}{\delta(X)} \to 1,$$

когда точка X произвольным образом неограниченно приближается к точке X_0.

Доказательство. Поверхность F является областью на некоторой полной выпуклой поверхности $\bar{F}$. Пусть X_1, $X_2, \ldots, X_n, \ldots,$ — последовательность точек, сходящаяся к точке X_0. На поверхности $\bar{F}$ точку X_0 можно соединить кратчайшей с любой точкой X_n. Для точек X_n, достаточно близких к X_0, эта кратчайшая будет расположена на F, и её длина, таким образом, будет расстоянием между точками X_n и X_0 на F.

Обозначим через $\bar{F}_n$ выпуклую поверхность, полученную из $\bar{F}$ преобразованием подобия относительно центра X_0 с коэффициентом подобия $\frac{1}{\delta(X_n)}$. При $n \to \infty$ последовательность поверхностей $\overline{F_n}$ сходится к касательному конусу K_0 поверхности F в точке X_0. Точка X_n поверхности F на поверхности $\overline{F}_n$ соответствует некоторая точка Y_n, расстояние которой от X_0 равно единице. При $n \to \infty$ точка Y_n неограниченно приближается к конусу K_0.



Черт. 4.

Пусть g — полупрямая с началом в точке X_0, продолжение которой за эту точку идёт внутрь тела, ограниченного поверхностью $\overline{F}$. Сместим прямолинейный отрезок X_0Y_n в направлении полупрямой g на малое расстояние ε в положение $X_0'Y_n'$ (черт. 4). При достаточно большом n ломаная $Y_nY_n'X_0'X_0$ расположена вне тела, ограниченного поверхностью $\overline{F}_n$. Поэтому расстояние между точками X_0 и Y_n на $\overline{F}_n$, равное $\frac{\rho(X_n)}{\delta(X_n)}$, меньше $1+2\varepsilon$. Так как $\frac{\rho(X_n)}{\delta(X_n)} > 1$, а ε произвольно, то при $n \to \infty$ $\frac{\rho(X_n)}{\delta(X_n)} \to 1$.

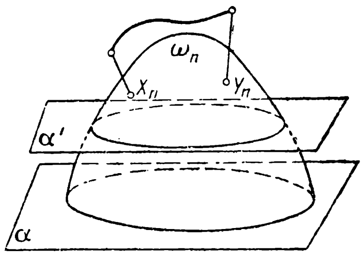
Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть ω — выпуклая шапочка с плоскостью основания α; $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ — последовательность выпуклых шапочек, сходящаяся к шапочке ω, причём граница каждой шапочки также расположена в плоскости α. Пусть, далее, на каждой шапочке ω_n даны точки X_n и Y_n, которые при $n \to \infty$ сходятся к точкам X и Y шапочки ω* *).

*) Сходимость шапочек ω_n к шапочке ω надо понимать в следующем смысле. Как бы ни была мала пространственная окрестность точки P шапочки ω, при достаточно большом n она пересекается с каждой шапочкой ω_n, но достаточно малая окрестность каждой точки Q, не принадлежащей шапочке ω или её границе, не пересекается с шапочками ω_n при достаточно больших n.

Тогда расстояние ρ_n *между точками* X_n *и* Y_n *на шапочке* ω_n *при* $n \to \infty$ *сходится к расстоянию* ρ *между точками* X *и* Y *на шапочке* ω.

Далее, если точки X *и* Y *шапочки* ω *можно соединить единственной кратчайшей* γ, *то кратчайшие* γ_n, *соединяющие* X_n *и* Y_n *на* ω_n, *сходятся к кратчайшей* γ.



Черт. 5.

Доказательство. Проведём плоскость α', параллельную плоскости α и отделяющую её от пары точек X и Y шапочки ω (черт. 5). При достаточно большом n точки X_n и Y_n будут, очевидно, расположены над плоскостью α' вместе с кратчайшей γ_n, соединяющей их на шапочке ω_n. Из последовательности кратчайших γ_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что сама последовательность γ_n сходится. Предельная кривая $\bar{\gamma}$ этой последовательности соединяет точки X и Y на шапочке ω и имеет длину $\bar{\rho}$, не превышающую нижнего предела последовательности ρ_n *):

$$\bar{\rho} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \rho_n.$$

Сместим кратчайшую γ, соединяющую точки X и Y на ω, вертикально вверх на расстояние $\varepsilon > 0$ и соединим её концы с точками X_n и Y_n прямолинейными отрезками. Полученная при этом кривая, соединяющая точки X_n и Y_n, при достаточно большом n лежит над шапочкой ω_n и имеет длину $\rho + \eta_n(\varepsilon) \geqslant \rho_n$. При бесконечном возрастании n $\eta_n(\varepsilon) \to 2\varepsilon$. Поэтому $\rho + 2\varepsilon \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \rho_n$ и, следовательно,

$$\bar{\rho} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \rho_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \rho_n \leqslant \rho + 2\varepsilon.$$

*) См. А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948, гл, II, § 1, теорема 5.

Так как ε произвольно, то $\bar{\rho} \leqslant \rho$. Но точки X и Y на ω нельзя соединить кривой, длина которой меньше ρ. Поэтому $\bar{\rho} = \rho$ и, следовательно, $\overline{\lim}\, \rho_n = \underline{\lim}\, \rho_n = \rho$. Так как длина $\bar{\gamma}$ равна ρ, то она кратчайшая. Если γ является единственной кратчайшей, соединяющей точки X и Y, то $\bar{\gamma}$ совпадает с γ.

Теорема доказана.

§ 3. Теорема И. М. Либермана и её следствия

Основным предложением о геодезических на выпуклой поверхности является теорема И. М. Либермана*) о выпуклости геодезической на проектирующем её цилиндре. При всей простоте этого предложения из него вытекают важные и многочисленные следствия, в целом дающие достаточно полную внешнюю характеристику геодезических линий на выпуклой поверхности.

Теорема 1**). *Пусть γ — геодезическая на выпуклой поверхности F и g — полупрямая, образующая со всеми внешними нормалями к опорным плоскостям поверхности F в каждой точке геодезической γ углы, меньшие $\frac{\pi}{2}$. Тогда на цилиндре Z, проектирующем геодезическую γ в направлении g, кривая γ является выпуклой и обращена выпуклостью в направлении g* (черт. 6, *а*).

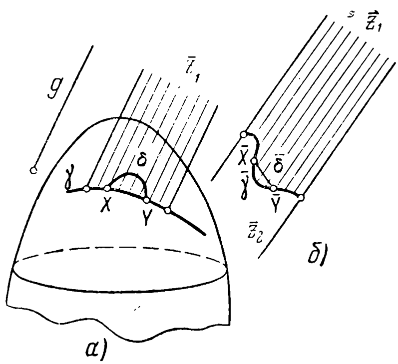
Доказательство. Во-первых, заметим, что для доказательства теоремы достаточно для каждой точки P геодезической γ указать отрезок этой геодезической, для которого точка P была бы внутренней и для которого теорема была бы верна.

Пусть γ' — отрезок геодезической γ с длиной ε, содержащий данную точку P в качестве одной из внутренних точек. Если ε достаточно мало, то γ' будет кратчайшей, причём не только на поверхности F, но и на полной выпуклой поверхности, частью которой является F. Поэтому теорему достаточно доказать для случая, когда γ является кратчайшей на полной выпуклой поверхности.

*) И. М. Либерман — ленинградский геометр. Погиб на фронте Отечественной войны в 1941 г.

**) Эту теорему, а также вытекающие из неё следствия читатель может найти в работе И. М. Либермана [3].

Развернём цилиндр Z на плоскость (черт. 6, *б*). Полученную при этом полосу между двумя параллельными прямыми развёртка кривой γ в силу условий теоремы разбивает на две области $\bar{Z}_1$ и $\bar{Z}_2$, одна из которых, например $\bar{Z}_1$, соответствует части Z_1 цилиндра Z, расположенной в направлении полупрямой g.



Черт. 6.

Допустим, что теорема неверна. Тогда на кривой $\bar{\gamma}$ найдётся пара точек $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, которые можно соединить прямолинейным отрезком δ в области $\bar{Z}_1$.

Отрезку δ на цилиндре Z соответствует кривая δ, соединяющая точки X и Y поверхности F, лежащая вне тела, ограниченного этой поверхностью. Согласно теореме Буземана и Феллера длина этой кривой не меньше расстояния между точками X и Y на F, которое совпадает с длиной отрезка XY геодезической γ. Таким образом, отрезок XY кривой $\bar{\gamma}$, равный по длине отрезку XY кратчайшей γ, должен быть короче прямолинейного отрезка $\bar{\delta}$ с концами $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. *Пусть γ — геодезическая на выпуклой поверхности F, s — её дуга, $\boldsymbol{r}(s)$ — радиус-вектор точки, соответствующей дуге s.*

Тогда вектор-функция $\boldsymbol{r}(s)$ имеет в каждой точке правую и левую производные по дуге s: $\boldsymbol{r}^+(s)$ и $\boldsymbol{r}^-(s)$, равные единице по абсолютной величине.

Почти для всех s существует вторая производная вектор-функции $\boldsymbol{r}(s)$ по s, если под второй производной понимать предел отношения

$$\frac{\boldsymbol{r}^{+}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}^{+}(s)}{\Delta s},$$

когда $\Delta s \to 0$.

Доказательство. Проведём из точки X_0 геодезической γ три полупрямые g_1, g_2, g_3, не лежащие в одной плоскости, внутрь тела, частью границы которого является поверхность F. Точная нижняя грань углов, образуемых полупрямыми g_1, g_2, g_3 с внешними нормалями к опорным плоскостям поверхности F в точке X_0, больше $\frac{\pi}{2}$. Поэтому можно указать такую достаточно малую окрестность ω точки X_0 на поверхности, что внешние нормали к опорным плоскостям F в точках, принадлежащих ω, образуют с полупрямыми g_1, g_2, g_3 углы, которые тоже больше $\frac{\pi}{2}$.

Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — три вектора с направлениями полупрямых g_1, g_2, g_3 и $\overline{\boldsymbol{r}}(s)$ — вектор с началом в точке X_0 и концом в точке $X(s)$, лежащей на геодезической γ и соответствующей дуге s.

Согласно теореме 1 каждая из следующих функций дуги s: $(\boldsymbol{e}_1, \overline{\boldsymbol{r}}(s))$, $(\boldsymbol{e}_2, \overline{\boldsymbol{r}}(s))$, $(\boldsymbol{e}_3, \overline{\boldsymbol{r}}(s))$, рассматриваемая для s, которым соответствуют точки $X(s)$ геодезической γ из области ω, является выпуклой и, следовательно, имеет для каждого такого s правую и левую производные и почти для всех s вторую производную. Но

$$\overline{\boldsymbol{r}}=\frac{(\overline{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_1\times \boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}+\frac{(\overline{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_2\times \boldsymbol{e}_3)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}+\frac{(\overline{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{e}_3)(\boldsymbol{e}_3\times \boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}.$$

Поэтому вектор-функция $\overline{\boldsymbol{r}}(s)$ тоже имеет правую и левую производные для всех упомянутых значений s и для почти всех s — вторую производную.

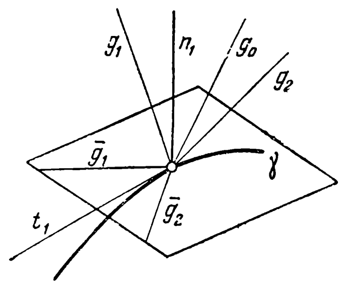
Так как X_0 — произвольная точка геодезической γ, а $\boldsymbol{r}(s)$ отличается от $\overline{\boldsymbol{r}}(s)$ на постоянный вектор $\boldsymbol{r}(s_0)$, соответствующий точке X_0, то $\boldsymbol{r}(s)$ для всех s имеет правую и левую производные и для почти всех s — вторую производную по дуге s.

Наконец, равенства $|\boldsymbol{r}^{+}(s)| = |\boldsymbol{r}^{-}(s)| = 1$ очевидным образом следуют из теоремы 3 предыдущего параграфа, согласно которой

$$\left|\frac{\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)}{\Delta s}\right| \to 1 \quad \text{при} \quad \Delta s \to 0.$$

Теорема доказана полностью.

Теорема 3. *Пусть γ — геодезическая на выпуклой поверхности F. Если угол между любыми внешними нормалями к опорным плоскостям поверхности F в точках геодезической γ не превосходит $\vartheta_0 < \frac{\pi}{3}$, то угол между правыми (левыми) полукасательными в любых двух точках X_1 и X_2 геодезической γ не превосходит $3\vartheta_0$.*



Черт. 7.

Доказательство. Проведём какую-нибудь опорную плоскость α_1 к F в точке X_1 через правую полукасательную t_1 к γ в этой точке. Пусть n_1 — внешняя нормаль к опорной плоскости α_1, g_1 и g_2 — полупрямые, идущие из точки X_1 перпендикулярно к t_1 под углом $\frac{\pi}{2} - \vartheta_0$ к нормали $\boldsymbol{n}_1$, и g_0 — полупрямая, образующая с полупрямой t_1 и нормалью $\boldsymbol{n}_1$ углы $\pi - \vartheta_0$ и $\frac{\pi}{2} - \vartheta_0$ соответственно (черт. 7).

Применяя к геодезической γ относительно полупрямых g_1, g_2, g_0 теорему 1 и замечая, что в точке X_1 правая полукасательная t_1 к γ образует с каждой из полупрямых g_1 и g_2 угол $\frac{\pi}{2}$, а с полупрямой g_0 — угол $\pi - \vartheta_0$, заключаем, что углы, образуемые правой полукасательной t_2 к γ в точке X_2 с полупрямыми g_1 и g_2, не меньше $\frac{\pi}{2}$, а с полупрямой g_0 — не меньше $\pi - \vartheta_0$.

Проведём через полукасательную t_2 опорную плоскость поверхности F. Пусть n_2 — внешняя нормаль к этой плоскости. Перенесём теперь параллельно плоскость α_2 с полупрямой t_2 и нормалью n_2 так, чтобы точка X_2 совпала с X_1, и повернём её на угол $\vartheta < \vartheta_0$, чтобы совпали нормали n_2 и n_1. При этом полупрямая t_2 будет повёрнута, очевидно, на угол, не превышающий ϑ_0, и образует с полупрямыми g_1, g_2 углы, не меньшие $\frac{\pi}{2} - \vartheta_0$, а с полупрямой g_0 — угол не меньше $\pi - 2\vartheta_0$.

Проведём теперь из точки X_1 в плоскости α_1 две полупрямые $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$, образующие острые углы с полупрямой t_1 и углы, равные $\frac{\pi}{2} - \vartheta_0$ с полупрямыми g_1 и g_2, соответственно. Полупрямая t_2 после поворота должна находиться или в угле, образованном полупрямыми $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$, или в угле, образованном продолжениями этих полупрямых, так как t_2 образует с g_1 и g_2 углы, не меньшие $\frac{\pi}{2} - \vartheta_0$. Вторая возможность исключается, потому что полупрямая t_2 образует угол не меньше $\pi - 2\vartheta_0 > \frac{\pi}{2}$ с полупрямой g_0. Таким образом, t_2 лежит между $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ и, следовательно, образует с t_1 угол, не больший половины угла, образованного этими полупрямыми.

Полупрямые g_1, g_2, $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ являются рёбрами выпуклого четырёхгранного угла. Сумма его плоских углов меньше 2π, а сумма его плоских углов, исключая угол φ, образованный полупрямыми $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$, равна $2\pi - 4\vartheta_0$. Поэтому $\varphi < 4\vartheta_0$. Следовательно, угол между полупрямыми t_1 и t_2 после поворота полупрямой t_2 меньше $2\vartheta_0$, а между t_1 и t_2 до поворота полупрямой t_2 меньше $3\vartheta_0$.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть X_0 — гладкая точка на выпуклой поверхности F, X — точка поверхности, близкая к X_0, $t(X)$ — полукасательная к кратчайшей, соединяющей точки X_0 и X, в точке X_0, $g(X)$ — полупрямая, проведённая из точки X_0 через точку X.*

Тогда угол $\vartheta(X)$, образованный полупрямыми $t(X)$ и $g(X)$, стремится к нулю, когда $X \to X_0$.

Доказательство. Пусть $\gamma(X)$ — кратчайшая, соединяющая точки X и X_0, $\boldsymbol{r}(Y)$ — радиус-вектор произвольной точки Y кратчайшей $\gamma(X)$. Так как вектор-функция $\boldsymbol{r}(Y)$ имеет правую и левую производные по дуге кратчайшей $\gamma(X)$, причём эти производные равномерно ограничены (равны единице по абсолютной величине), то

$$\boldsymbol{r}(X)-\boldsymbol{r}(X_0)=\int\limits_{(X_0)}^{(X)}\boldsymbol{r}^+(X)\,ds,$$

где $\boldsymbol{r}^+(Y)$ — производная вектор-функции $\boldsymbol{r}(Y)$ по дуге s кратчайшей $\gamma(X)$ в направлении X_0X.

Пусть ε — малое положительное число. Существует окрестность ω точки X_0 на поверхности F такая, что внешние нормали поверхности в точках этой окрестности образуют с внешней нормалью в точке X_0 углы, не превосходящие ε. По теореме 3 каждый из векторов $\boldsymbol{r}^+(Y)$, если $\gamma(X)\subset\omega$, образует с $t(X)$ угол, не превосходящий 6ε. Поэтому угол, образуемый вектором $\boldsymbol{r}(X)-\boldsymbol{r}(X_0)$ с полукасательной $t(X)$, или, что то же самое, угол $\vartheta(X)$, не превосходит 6ε и, следовательно, сколь угодно мал, если точка X достаточно близка к точке X_0.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть F — выпуклая шапочка с плоскостью основания α; F_1, F_2, ..., F_n, ... — последовательность выпуклых шапочек, сходящаяся к шапочке F, причем граница каждой шапочки также расположена в плоскости α. Пусть, далее, на каждой шапочке F_n дана точка X_n и кратчайшая γ_n, выходящая из этой точки.*

Тогда, если при $n\to\infty$ точки X_n сходятся к гладкой точке X на F, а кратчайшие γ_n сходятся к кратчайшей γ на F, то полукасательные t_n к кратчайшим γ_n в точках X_n сходятся к полукасательной γ в точке X.

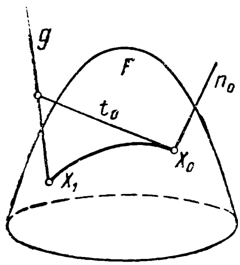
Доказательство. Для каждого положительного числа δ можно указать такое $\varepsilon(\delta)$, что угол между нормалями шапочки F в точке X и в любой точке ε-окрестности точки X будет меньше δ. Если после такого выбора числа ε взять достаточно большим число n, то углы между нормалями к опорным плоскостям шапочки F_n в точке X_n и в любой точке ε-окрестности точки X_n будут меньше 2δ.

Пусть Y — точка кратчайшей γ, близкая к точке X, Y_n — точка кратчайшей γ_n, ближайшая к Y. При достаточной близости точки Y к X и достаточно больших n отрезок XY кратчайшей γ и отрезки X_nY_n кратчайших γ_n находятся в ε-окрестностях точек X и X_n соответственно. По теореме 3 отсюда следует, что угол между полукасательными t и t_n не больше $9\delta + \varphi_n$, где φ_n — угол, образуемый прямолинейными отрезками XY и X_nY_n. Так как $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$, а δ взято произвольно, то это значит, что полукасательные t_n сходятся к полукасательной t.

Теорема доказана.

§ 4. Представление радиус-вектора точки выпуклой поверхности в окрестности некоторой начальной точки

Простота исследования в малом регулярных поверхностей в дифференциальной геометрии объясняется возможностью разложения радиус-вектора точки поверхности в окрестности каждой точки поверхности.



Черт. 8.

В этом параграфе будет дано аналогичное разложение для гладких выпуклых поверхностей без дальнейших предположений о регулярности.

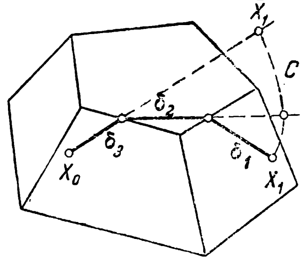
Теорема 1. *Пусть γ — кратчайшая на гладкой выпуклой шапочке F, соединяющая точки X_1 и X_0; t_0 — полукасательная кратчайшей γ в точке X_0; $\overline{X}_1$ — точка на полукасательной t_0, отстоящая от X_0 на расстоянии, равном длине кратчайшей γ, g — полупрямая, проведённая из точки X_1 через точку $\overline{X}_1$ (черт. 8).*

Тогда угол, образуемый полупрямой g с внешней нормалью n_0 к F в точке X_0, не превосходит наибольшего угла, образуемого внешними нормалями шапочки F в точках кратчайшей γ с внешней нормалью n_0.

Доказательство. Докажем сначала теорему для случая, когда F — многогранная выпуклая шапочка, а X_1 и

X_0 — внутренние точки её граней. Геодезическая γ в этом случае представляет собой ломаную, звенья которой лежат на гранях шапочки, а вершины — на её рёбрах.

Обозначим через $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ звенья ломаной γ при следовании от X_1 до X_0, $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — содержащие их грани, $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ — рёбра, по которым примыкают грани α_1 и α_2, α_2 и α_3 и т. д. соответственно; $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1}$ — двугранные углы с рёбрами $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$.



Черт. 9.

Подвергнем ломаную γ следующей деформации. Сначала повернём звено δ_1 вместе с гранью α_1, которой оно принадлежит, около ребра k_1 на угол $\pi - \vartheta_1$. При этом звено δ_1 окажется на продолжении звена δ_2 (черт. 9). Затем повернём звенья δ_1 и δ_2 вместе с гранью α_2 около ребра k_2 на угол $\pi - \vartheta_2$. Звенья δ_2 и δ_1 окажутся на продолжении звена δ_3 и т. д. После поворота около ребра k_{n-1} все звенья ломаной будут лежать на полупрямой t_0, и конец X_1 звена δ_1 совпадёт с точкой $\bar{X}_1$.

При описанной нами деформации ломаной γ её конец движется по гладкой кривой c, составленной из дуг окружностей, полукасательные к которым, проведённые в направлении $\bar{X}_1 X_1$, параллельны и одинаково направлены с внешними нормалями к опорным плоскостям многогранника F вдоль кратчайшей γ. Поэтому вся кривая c, а следовательно, и её точка X_1, оказывается внутри конуса с вершиной $\bar{X}_1$, с осью, параллельной и одинаково направленной с n_0, и углом при вершине (т. е. углом между осью и образующей), равным наибольшему углу, образуемому внешними нормалями опорных плоскостей многогранника вдоль кратчайшей γ с внешней нормалью к грани α_n. Что и требовалось доказать.

Пусть теперь F — гладкая выпуклая шапочка. Возьмём на кратчайшей γ точку X_2, близкую к точке X_1. Точку X_2 с X_0 на поверхности F можно соединить только одной кратчайшей, именно отрезком X_0X_2 кратчайшей γ*). Если теорема окажется верной для каждого отрезка X_0X_2 кратчайшей γ, то она верна и для всей кратчайшей. Поэтому можно считать, что точки X_1 и X_0 можно соединить единственной кратчайшей γ.

Построим последовательность многогранных выпуклых шапочек F_k, сходящуюся к шапочке F. Для этого впишем в границу основания шапочки F выпуклый многоугольник p_k с малыми сторонами. Затем возьмём на шапочке F достаточно густую сеть из конечного числа точек $Q_{k_1}, Q_{k_2}, \ldots, Q_{k_s}$, которые проектируются на плоскость основания шапочки F внутрь многоугольника p_k. Минимальная выпуклая оболочка множества, состоящего из многоугольника p_k и точек Q_{k_i}, есть замкнутый выпуклый многогранник, который состоит из шапочки F_k и её основания — многоугольника p_k. Если стороны многоугольника p_k неограниченно уменьшать, а густоту сети точек Q_{k_i} увеличивать, то многогранные шапочки F_k будут сходиться к шапочке F.

Возьмём на гранях шапочки F_k точки $X_0^{(k)}$ и $X_1^{(k)}$, сходящиеся при $k \to \infty$ к точкам X_0 и X_1 шапочки F. Соединим точки $X_0^{(k)}$ и $X_1^{(k)}$ кратчайшей $\gamma^{(k)}$ на F_k. Построим, далее, как и для поверхности F, полукасательную $t_0^{(k)}$, точку $\overline{X}_1^{(k)}$ и полупрямую $g^{(k)}$.

Пусть ε — любое малое положительное число. При достаточно большом k угол между внешней нормалью многогранника F_k в точке $X_0^{(k)}$ и внешней нормалью поверхности F в точке X_0 меньше ε; наибольший угол, образуемый внешней нормалью к F_k в точке $X_0^{(k)}$ с внешними нормалями опорных плоскостей вдоль $\gamma^{(k)}$, не больше $\vartheta_0 + \varepsilon$, где ϑ_0 — наибольший угол, образуемый нормалью n_0 поверхности F с внешними нормалями этой поверхности вдоль кратчайшей γ. При $n \to \infty$ полукасательная $t_0^{(k)}$ сходится к t_0, длина $\gamma^{(k)}$ сходится к длине γ, поэтому $g^{(k)} \to g$, и следо-

*) Это следует из теоремы А. Д. Александрова о неналегании кратчайших на общей выпуклой поверхности (см. [1], стр. 72). Теорема 1 нами будет применяться только к выпуклым поверхностям с регулярной метрикой, для которых это утверждение очевидно.

вательно, угол между n_0 и g не больше $\vartheta_0 + 2\varepsilon$. Так как ε произвольно мало, то угол между n_0 и g не больше ϑ_0.

Теорема доказана.

Как следствие теоремы 1, теоремы 3 § 2 и теоремы 4 § 3 настоящей главы получается

Теорема 2. *Пусть* X_0 — *точка гладкой выпуклой поверхности,* X — *близкая к ней точка,* $\boldsymbol{\tau}(X)$ — *единичный вектор полукасательной в точке* X_0 *к кратчайшей, соединяющей точки* X *и* X_0, $s(X)$ — *длина кратчайшей. Тогда для радиус-вектора* $\boldsymbol{r}(X)$ *точки* X *имеет место следующее представление:*

$$\boldsymbol{r}(X) = \boldsymbol{r}(X_0) + \boldsymbol{\tau}(X)\, s(X) + \boldsymbol{\nu}(X),$$

где $\boldsymbol{\nu}(X)$ — *вектор, направление которого при* $X \to X_0$ *сходится к направлению внутренней нормали поверхности* F *в точке* X_0, *и, кроме того,*

$$\frac{|\boldsymbol{\nu}(X)|}{s(X)} \to 0.$$

ГЛАВА II

О КРИВИЗНЕ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Теорема А. Д. Александрова о гладкости выпуклой поверхности с ограниченной удельной внешней кривизной

В теории поверхностей и особенно теории выпуклых поверхностей важную роль играет понятие внешней кривизны.

Внешней кривизной множества M на выпуклой поверхности F называют площадь сферического изображения $\omega(M)$ множества M. При этом под площадью множества понимают его лебегову меру.

Так как сферическое изображение замкнутого множества на выпуклой поверхности является замкнутым, то внешняя кривизна определена для всех замкнутых множеств.

Более того, как показал А. Д. Александров ([1], стр. 157), внешняя кривизна определена для всех борелевских множеств на выпуклой поверхности и является вполне аддитивной функцией множества.

Кривизна борелевского множества M на выпуклой поверхности совпадает с внутренней лебеговой мерой его сферического изображения, т. е. верхней гранью площадей замкнутых множеств, содержащихся в сферическом изображении множества M.

В связи с этим мы определим внешнюю кривизну любого множества на выпуклой поверхности, как внутреннюю лебегову меру его сферического изображения.

Удельной внешней кривизной множества на выпуклой поверхности будем называть отношение внешней кривизны множества к его площади.

Относительно выпуклой поверхности будем говорить, что она имеет ограниченную удельную внешнюю кривизну, если удельные кривизны всех областей на поверхности равномерно ограничены.

Для выпуклых поверхностей с ограниченной внешней удельной кривизной имеет место следующая важная теорема А. Д. Александрова [4].

Теорема 1. *Каждая точка X выпуклой поверхности ограниченной удельной внешней кривизны или гладкая, или принадлежит прямолинейному ребру, причём точка X не является концом этого ребра.*

Доказательство. Если точка X не является гладкой и не является внутренней точкой прямолинейного ребра, лежащего на поверхности, то могут быть только следующие три возможности:

1) точка X коническая;

2) точка X ребристая, причём через неё не проходит никакое прямолинейное ребро;

3) точка X является концом прямолинейного ребра. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что в каждом из этих случаев внешняя удельная кривизна поверхности не ограничена.

Если точка X коническая, то сферическое изображение любой сколь угодно малой окрестности точки X на поверхности покрывает сферическое изображение касательного конуса поверхности в точке X. Следовательно, площадь сферического изображения любой окрестности точки X не меньше площади сферического изображения конуса. Так как у точки X существуют окрестности сколь угодно малой площади, то внешняя удельная кривизна в конической точке поверхности не ограничена.

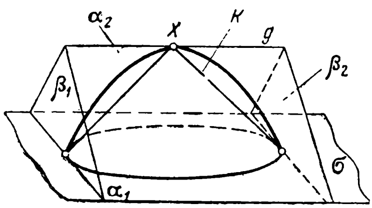
Пусть теперь точка X ребристая и через неё не проходит никакое прямолинейное ребро. Касательный конус поверхности в такой точке представляет собой двугранный угол. Пусть α_1 и α_2 — грани этого угла, а g — его ребро. Проведём плоскость σ, параллельную ребру g, пересекающую его грани α_1 и α_2 под равными углами и отстоящую на расстоянии z от точки X. Если z достаточно мало, шапочка E, которую отрезает плоскость от поверхности F, проектируется на плоскость σ однозначно.

Проведём теперь две плоскости β_1 и β_2 перпендикулярно к ребру k так, чтобы они упирались в край шапочки (черт. 10). Полуплоскости α_1 и α_2, плоскости β_1, β_2 и σ ограничивают грёхгранную призму. Площадь поверхности этой призмы без площади грани, лежащей в плоскости σ, не меньше площади поверхности шапочки и равна

$$2z^2 \operatorname{tg} \vartheta + \frac{2z}{\cos\vartheta}(x_1 + x_2) = \frac{2z}{\cos\vartheta}(z \sin\vartheta + x_1 + x_2),$$

где x_1 и x_2 — расстояния плоскостей β_1 и β_2 от точки X, а ϑ — половина двугранного угла, образуемого гранями призмы α_1 и α_2. Таким образом, площадь поверхности шапочки E

$$S(E) < \frac{2z}{\cos\vartheta}(z + x_1 + x_2).$$



Черт. 10.

Оценим теперь площадь сферического изображения шапочки. Для этого рассмотрим конус K, проектирующий основание шапочки из точки X. Сферическое изображение шапочки E покрывает сферическое изображение конуса K, так как для каждой опорной плоскости конуса существует параллельная опорная плоскость шапочки. По той же причине сферическое изображение четырёхгранного угла, проектирующего из точки X грань призмы, лежащую в плоскости σ, покрывается сферическим изображением конуса K.

Сферическое изображение этого четырёхгранного угла есть сферический четырехугольник с диагоналями, пересекающимися под прямым углом и равными по длине $\pi - 2\vartheta$ и $\pi - 2\varphi$, где 2ϑ — угол, образуемый гранями α_1 и α_2, а 2φ — угол, образуемый двумя другими противолежащими гранями. Если z достаточно мало, $\pi - 2\varphi$ тоже мало, и площадь сферического четырёхугольника $\approx \frac{1}{2}(\pi - 2\vartheta)(\pi - 2\varphi)$. Во всяком случае, существует постоянная $m \neq 0$ такая, что площадь четырёхугольника будет больше

$$m(\pi - 2\vartheta)(\pi - 2\varphi).$$

Так как $\pi - 2\varphi = \operatorname{arctg}\frac{z}{x_1} + \operatorname{arctg}\frac{z}{x_2}$, то ввиду малости отношений $\frac{z}{x_1}$ и $\frac{z}{x_2}$ можно считать, что $\pi - 2\varphi > \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x_1} + \frac{z}{x_2}\right)$. Таким образом, площадь сферического изображения рассматриваемого четырёхгранного угла, а следовательно, и площадь сферического изображения шапочки E

$$\omega(E) > \frac{m}{2}(\pi - 2\vartheta)\left(\frac{z}{x_1} + \frac{z}{x_2}\right).$$

Отсюда для удельной внешней кривизны шапочки E следует:

$$\frac{\omega(E)}{S(E)} > \frac{m\cos\vartheta}{4}(\pi - 2\vartheta)\left(\frac{1}{z + x_1 + 2x_2} + \frac{1}{z + 2x_1 + x_2}\right);$$

она неограниченно растёт, когда отрезающая шапочку E плоскость σ приближается к точке X.

Случай, когда точка X является концом прямолинейного ребра g, рассматривается аналогично. Нужно только плоскость σ проводить через точку X_1 ребра g, отличную от X, на малом расстоянии z от точки X. При этом, если точка X_1 приближается к X, а z убывает быстрее, чем расстояние между X и X_1, то внешняя удельная кривизна шапочки, отрезаемой плоскостью σ от поверхности F, неограниченно растёт.

Итак, если в точке X выпуклой поверхности F внешняя удельная кривизна ограничена, то или точка X гладкая, или через точку X проходит прямолинейное ребро, по которому поверхность имеет излом, причём точка X не является концом этого ребра. Никакие другие особенности в точке X невозможны.

Из теоремы 1 вытекают важные следствия.

Следствие 1. *Выпуклые шапочки с ограниченной удельной внешней кривизной являются гладкими.*

Действительно, нарушение гладкости может быть только из-за наличия прямолинейного ребра, концы которого лежат на границе шапочки. Но тогда шапочка вырождается в плоскую выпуклую область.

Следствие 2. *Если полная выпуклая поверхность с ограниченной удельной внешней кривизной не является цилиндром, то она гладкая. В частности, все замкнутые поверхности ограниченной удельной кривизны гладкие.*

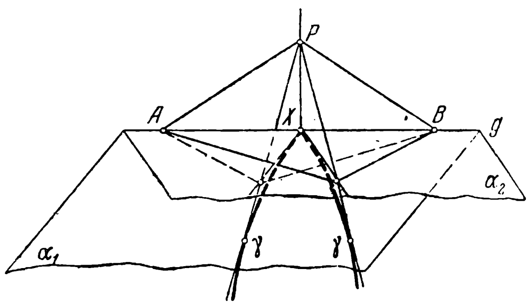
В самом деле, ребро, из-за наличия которого нарушается гладкость, должно быть некоторой прямой. С другой стороны, выпуклая поверхность, содержащая целую прямую, является цилиндрической. Читателю предлагается доказать последнее утверждение.

Во многих случаях оказывается полезной следующая теорема, принадлежащая также А. Д. Александрову [4].

Теорема 2. *Пусть F — выпуклая поверхность, g — прямолинейный отрезок на поверхности F, X — точка отрезка g.*

Тогда существует последовательность областей на поверхности, сходящихся к точке X, удельные внешние кривизны которых неограниченно убывают.

Доказательство. Касательный конус поверхности в точке X есть или двугранный угол, или плоскость. В обоих



Черт. 11.

случаях прямая, содержащая отрезок g, разбивает касательный конус на две полуплоскости α_1 и α_2 (черт. 11).

Проведём плоскость σ через точку X перпендикулярно к отрезку g. Она пересекает поверхность по выпуклой кривой γ. Полукасательные этой кривой в точке X суть полупрямые, по которым плоскость σ пересекает полуплоскости α_1, α_2. Не ограничивая общности, можно считать, что каждая из этих полукасательных имеет с кривой γ только одну общую точку, именно точку X. В противном случае кривая γ содержала бы прямолинейный отрезок с концом в точке X. Но тогда на F была бы плоская область, и построение областей, существование которых утверждается теоремой 2, не составляло бы труда.

Пусть n — внешняя нормаль поверхности F в точке X, образующая с полуплоскостями α_1 и α_2 равные углы, P—точка на ней, близкая к точке X; A и B — точки отрезка g, взятые по разные стороны от точки X.

Опорные полупрямые кривой γ, проведённые из точки P, вместе с полупрямыми PA и PB образуют рёбра выпуклого четырёхгранного угла E с вершиной в точке P.

Угол E вырезает на поверхности F некоторую область G в виде криволинейного четырёхугольника, площадь которого, очевидно, не меньше площади соответствующего четырёхугольника $\overline{G}$ на полуплоскостях α_1, α_2, а внешняя кривизна меньше внешней кривизны угла E. Поэтому удельная внешняя кривизна области G не больше отношения внешней кривизны E к площади четырёхугольника $\overline{G}$.

Если расстояние h точки P от точки X мало по сравнению с расстоянием точки X от точек A и B, то внешняя кривизна угла E

$$\omega(E) \leqslant \frac{ch}{d},$$

где d — расстояние между точками A и B, а c — некоторая постоянная.

Площадь четырёхугольника $\overline{G}$

$$S(\overline{G}) = \frac{1}{2} d(\delta_1(h) + \delta_2(h)),$$

где $\delta_1(h)$ и $\delta_2(h)$ — расстояния точки X от вершин четырёхугольника $\overline{G}$, отличных от A и B.

Очевидно, когда точка P неограниченно приближается к X, т. е. когда $h \to 0$,

$$\frac{h}{\delta_1(h)} \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{h}{\delta_2(h)} \to 0.$$

Поэтому отношение

$$\frac{\omega(E)}{S(\overline{G})} \leqslant \frac{2ch}{d^2(\delta_1(h) + \delta_2(h))}$$

стремится к нулю, если надлежащим образом неограниченно приближать точки A, B и P к точке X.

Так как удельная внешняя кривизна области G меньше отношения $\frac{\omega(E)}{S(\bar{G})}$, то действительно существует последовательность областей на поверхности F, сходящихся к точке P удельные кривизны которых неограниченно убывают.

Теорема доказана.

§ 2. Об угле между геодезическими и площади выпуклой поверхности с регулярной метрикой

Выпуклая поверхность называется регулярной (k раз дифференцируемой), если в окрестности каждой точки поверхности могут быть введены локальные координаты u, v так, что радиус-вектор точки поверхности $r(u, v)$ как функция переменных u, v будет регулярной (k раз дифференцируемой) функцией.

Длина гладкой кривой γ, заданной уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$ на регулярной поверхности Φ, как известно, равна

$$\int_{\gamma} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt,$$

где E, F и G соответственно равны $(r_u r_u)$, $(r_u r_v)$, $(r_v r_v)$.

Квадратичная форма

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

называется линейным элементом поверхности.

Может случиться, что хотя поверхность и не регулярна, но в окрестности каждой точки её могут быть введены локальные координаты u, v так, что длина каждой кривой γ на поверхности, заданной уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, равна

$$\int_{\gamma} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt,$$

где E, F и G — некоторые регулярные функции переменных u, v. Относительно такой поверхности мы говорим, что она имеет регулярную метрику. Форму $E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$ и в этом случае будем называть линейным элементом поверхности.

Очевидно, регулярная выпуклая поверхность имеет регулярную метрику; обратное, вообще говоря, неверно *).

До сих пор, говоря об угле ϑ между геодезическими γ_1 и γ_2, выходящими из точки X на выпуклой поверхности Φ, мы понимали под этим угол между полукасательными к этим геодезическим в точке X. Если Φ — регулярная поверхность с линейным элементом $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, $u = u_1(\alpha)$, $v = v_1(\alpha)$ и $u = u_2(\beta)$, $v = v_2(\beta)$ — уравнения геодезических γ_1 и γ_2 соответственно, то такому пониманию угла соответствует, как известно, следующее его выражение:

$$\cos\vartheta = \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv_1'v_2'}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2}\cdot\sqrt{Eu_2'^2 + 2Fu_2'v_2' + Gv_2'^2}}.$$

Если выпуклая поверхность имеет регулярную метрику, но сама поверхность нерегулярна, то данное выше выражение для угла между геодезическими, вообще говоря, неверно. Однако имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть Φ — выпуклая шапочка с регулярной метрикой, $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ — линейный элемент шапочки в окрестности гладкой точки X_0. Пусть, далее, $u = u_1(\alpha)$, $v = v_1(\alpha)$ и $u = u_2(\beta)$, $v = v_2(\beta)$ — уравнения геодезических γ_1 и γ_2, выходящих из точки X_0.*

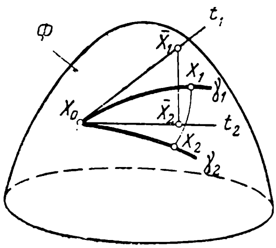
Тогда для угла ϑ между геодезическими γ_1 и γ_2, т. е. угла между полукасательными к ним в точке X_0, имеет место следующее выражение:

$$\cos\vartheta = \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv_1'v_2'}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2}\cdot\sqrt{Eu_2'^2 + 2Fu_2'v_2' + Gv_2'^2}}.$$

Доказательство. Отложим на геодезических γ_1, γ_2 и на полукасательных к ним в точке X_0 t_1, t_2 отрезки малой длины δ. Рассмотрим теперь два треугольника: геодезический треугольник $X_0X_1X_2$ и плоский треугольник $X_0\overline{X}_1\overline{X}_2$ (черт. 12).

*) Двугранный угол, например, есть нерегулярная выпуклая поверхность, имеющая регулярную метрику.

Пусть $\bar{\delta}_1 = 2\delta \sin\frac{\vartheta}{2}$ — расстояние между точками $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$. Согласно теореме 2 § 4 гл. I расстояния между точками X_1 и $\bar{X}_1$, X_2 и $\bar{X}_2$ малы по сравнению с δ, а следовательно, и по сравнению с $\bar{\delta}_1$, если достаточно мало δ. Далее, из той же теоремы следует, что при достаточно малом δ ломаная $X_1\bar{X}_1\bar{X}_2X_2$ лежит вне тела, ограниченного шапочкой Φ и её основанием, а потому длина ломаной больше стороны X_1X_2 геодезического треугольника $X_0X_1X_2$, которая в свою очередь не меньше пространственного расстояния между точками X_1 и X_2.



Черт. 12.

Принимая во внимание приведённые выше соображения, делаем вывод, что сторона X_1X_2 геодезического треугольника $X_0X_1X_2$ равна $\bar{\delta}_1(1+\varepsilon(\delta))$, причём $\varepsilon(\delta)$ стремится к нулю вместе с δ.

Построим треугольник на плоскости со сторонами, равными сторонам геодезического треугольника $X_0X_1X_2$. При $\delta \to 0$ угол $\vartheta(\delta)$ этого треугольника, противолежащий стороне $\bar{\delta}_1(1+\varepsilon(\delta))$, стремится к некоторому пределу ϑ', причём

$$\cos\vartheta' = \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv_1'v_2'}{\sqrt{Eu_1'^2+2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2}\cdot\sqrt{Eu_2'^2 + 2Fu_2'v_2'^2+Gv_2'^2}}.$$

С другой стороны, очевидно, $\vartheta(\delta) \to \vartheta$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь некоторые вопросы, относящиеся к площади выпуклой поверхности.

Обычное определение площади выпуклой поверхности, которым мы по существу пользовались до сих пор, состоит в следующем. Пусть F — полная выпуклая поверхность и M — замкнутое множество на ней, F_n — последовательность выпуклых многогранников, сходящаяся к F, и M_n — замкнутые множества на поверхностях F_n, которые получаются проектированием множества M на поверхности F_n из некоторой точки O, лежащей внутри F. Тогда под площадью множества M на поверхности F понимают предел площадей множеств M_n на многогранниках F_n. Оказывается, этот предел всегда существует и не зависит ни от выбора последовательности многогранников F_n, ни от выбора центра проектирования O.

Площадь открытого множества определяется как верхняя грань содержащихся в нём замкнутых множеств. Если теперь M — любое множество и верхняя грань $S(M)$ площадей замкнутых множеств, содержащихся в M, равна нижней грани площадей открытых множеств, содержащих M, то говорят, что множество M имеет площадь $S(M)$.

Если поверхность Ф регулярна и $ds^2 = E du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ — её линейный элемент, то площадь множества M на поверхности определяется по формуле:

$$S(M) = \int_M \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

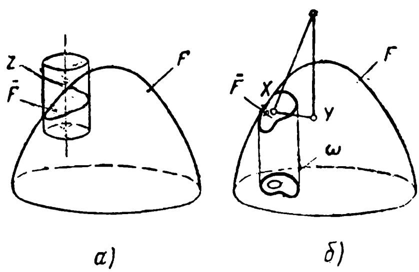
Менее очевидно то, что на выпуклой поверхности с регулярной метрикой без предположения о регулярности самой поверхности имеет место такое же представление для площади множества M, хотя это действительно так. Мы не будем этого доказывать, так как в таком виде это предложение нам не понадобится, и ограничимся доказательством следующего простого утверждения.

Лемма 1. *Пусть M — множество точек на выпуклой шапочке, опорные плоскости которой образуют с плоскостью её основания углы, меньшие $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$, X — точка множества M. Пусть, далее, все точки шапочки, расстояния которых от X меньше δ_1, принадлежат M, но никакая точка шапочки, удалённая от X на расстояние, большее $\delta_2 \geqslant \delta_1$, не принадлежит M.*

Тогда существуют постоянные c_1 и c_2, зависящие только от ϑ_0, такие, что

$$c_1\delta_1^2 < S(M) < c_2\delta_2^2.$$

Доказательство. Множество M содержится внутри цилиндра радиуса δ_2 с высотой $2\delta_2$ и осью, перпендикулярной к основанию шапочки F (черт. 13, a). Кусок $\bar{F}$ поверхности F, содержащийся внутри цилиндра Z, вместе с частью боковой поверхности его и нижним основанием образует замкнутую выпуклую поверхность, содержащуюся внутри цилиндра Z. Площадь её меньше площади поверхности цилиндра. Поэтому площадь поверхности $\bar{F}$, а тем более множества M, не больше $5\pi\delta_2^2$. Число 5π и есть постоянная c_2, существование которой утверждается леммой.



Черт. 13.

Докажем существование постоянной c_1. Проекция множества M на плоскость основания шапочки покрывает круг ω радиуса

$$\delta_1 k(\vartheta_0) = \delta_1 \frac{\cos\vartheta_0}{1+2\sin\vartheta_0},$$

в центр которого проектируется точка X.

Действительно, допустим, что в круг ω проектируется точка Y шапочки F, не принадлежащая M. Соединим эту точку с точкой X ломаной с двумя звеньями (черт. 13, *б*), из коих одно перпендикулярно к плоскости основания шапочки, а другое образует с ним угол ϑ_0. Такая ломаная по теореме Буземана имеет длину, не меньшую, чем расстояние между точками X и Y на F, а вместе с тем её длина, очевидно, меньше δ_1. Мы пришли к противоречию. Итак, проекция множества M на плоскость основания шапочки покрывает круг радиуса $k(\vartheta_0)\,\delta_1$, а следовательно, имеет площадь, большую площади этого круга,

$$\pi k^2(\vartheta_0)\,\delta_1^2 \leqslant S(M).$$

Существование постоянной c_1 также доказано.

§ 3. Теорема Гаусса

Известна теорема Гаусса о том, что внешняя кривизна регулярной выпуклой поверхности равна её внутренней интегральной кривизне, т. е. интегралу от гауссовой кривизны по площади поверхности.

А. Д. Александрову [1] принадлежит обобщение этой теоремы на случай общих выпуклых поверхностей. Он дал определение внутренней кривизны произвольной выпуклой поверхности с помощью её метрики и доказал, что она совпадает с внешней кривизной.

В настоящем параграфе мы дадим доказательство теоремы Гаусса для выпуклых поверхностей с регулярной метрикой без предположения о регулярности самой поверхности.

Теорема 1. *Пусть F — выпуклая шапочка с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной, X — произвольная точка шапочки и G — область на F, расположенная в достаточно малой окрестности H точки X. Тогда внешняя кривизна области G* выражается формулой:

$$\omega(G) = \int_G K\sqrt{eg - f^2}\, du\, dv,$$

где e, f, g — коэффициенты квадратичной формы ds^2 — линейного элемента поверхности, а K — гауссова кривизна.

Докажем предварительно несколько лемм.

Лемма 1. *Внешняя кривизна выпуклого многогранного угла равна $2\pi - \vartheta$, где ϑ — сумма плоских углов α_k при его вершине.*

Доказательство. Сферическое изображение выпуклого многогранного угла есть выпуклый многоугольник на единичной сфере, у которого стороны суть дуги больших кругов, а углы β_k дополняют соответствующие плоские углы α_k многогранного угла до π. Применяя к этому многоугольнику теорему Гаусса-Бонне, получим

$$\omega = 2\pi - \sum_k (\pi - \beta_k) = 2\pi - \vartheta,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть Δ — геодезический треугольник на выпуклой многогранной шапочке F с вершинами на гранях шапочки. Тогда внешняя кривизна треугольника Δ равна*

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

где α, β, γ — углы треугольника.

Доказательство. Треугольник Δ рёбрами многогранника F разбивается на плоские выпуклые многоугольники. Пусть m — число этих многоугольников, l — число их сторон и k — число вершин (каждая вершина и каждая сторона считаются один раз, хотя они могут принадлежать более чем одному многоугольнику). Тогда по теореме Эйлера

$$k - l + m = 1.$$

Подсчитаем сумму S всех внутренних углов многоугольника. Так как в многоугольнике с n вершинами сумма внутренних углов равна $(n-2)\pi$, то

$$S = \pi \sum_{i=1}^{m} (n_i - 2) = 2\pi l' + \pi l'' - 2\pi m,$$

где l' — число сторон многоугольников, которые проходят внутри треугольника Δ, а l'' — число сторон, которые лежат на его границе.

Сумму S можно получить иначе, найдя сначала сумму ϑ_i углов с данной вершиной, а потом сложив результаты. При этом

$$S = \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i = \sum_{i=1}^{k} (2\pi - \omega_i) = 2\pi k - \sum_{i=1}^{k} \omega_i.$$

Сопоставляя полученные результаты для S, с помощью теоремы Эйлера получаем:

$$2\pi + \pi l'' - \sum_{i=1}^{k} \omega_i = 0.$$

Разобьём сумму $\sum$ в левой части равенства на три суммы $\sum_1$, $\sum_2$, $\sum_3$, в которых суммирования распространены на вершины многоугольников, лежащие соответственно внутри треугольника Δ, на его сторонах и в вершинах. Замечая, что каждое слагаемое второй суммы равно π, а слагаемые третьей суммы равны $2\pi-\alpha$, $2\pi-\beta$, $2\pi-\gamma$, после очевидных упрощений получим

$$\sum\nolimits_1 \omega_i = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

В силу леммы 1 сумма $\sum_1 \omega_i$ равна внешней кривизне треугольника.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть F — выпуклая шапочка, M — замкнутое множество на F; $F_1, F_2, \ldots$ — последовательность выпуклых шапочек с той же плоскостью основания, что и F, сходящаяся к F; M_n — последовательность замкнутых множеств шапочек F_n, сходящаяся к M.*

Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при достаточно большом n сферическое изображение множества M_n содержится в ε-окрестности сферического изображения множества M.

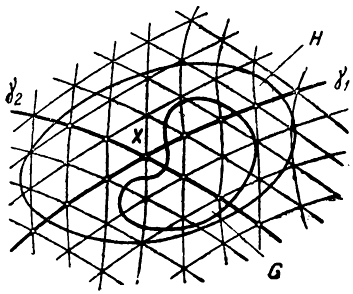
Лемма 4. *Пусть F — существенно выпуклая шапочка (это значит, что каждая опорная плоскость шапочки имеет с шапочкой только одну общую точку); G — открытое множество на F, содержащее замкнутое множество M' и само содержащееся в замкнутом множестве M'' на F. Пусть, далее, F_n — последовательность выпуклых шапочек с той же плоскостью основания, что и F, сходящаяся к F; M_n — последовательность замкнутых множеств шапочек F_n, сходящаяся к M'.*

Тогда при достаточно большом n сферическое изображение множества M_n содержится в сферическом изображении множества M''.

Доказательств лемм 3 и 4 мы не приводим. Они довольно просты и опираются существенно только на следующий, сам по себе довольно простой факт.

Пусть F — выпуклая шапочка, F_n — последовательность шапочек, сходящаяся к F; X_n — точка на шапочке F_n, α_n — опорная плоскость в этой точке. Если при $n \to \infty$ последовательность точек X_n сходится к некоторой точке X шапочки F, а последовательность плоскостей α_n сходится к некоторой плоскости α, то эта плоскость будет опорной плоскостью шапочки F в точке X.

Переходим теперь к доказательству теоремы 1. Проведём через точку X поверхности F две взаимно перпендикулярные геодезические γ_1 и γ_2. Отметим на каждой из них точки A_k и B_k, отстоящие от точки X на расстоянии $k\delta$, и проведём через эти точки геодезические, перпендикулярные к γ_1 и γ_2 соответственно (черт. 14). При этом окрестность H точки X будет покрыта геодезическими четырёхугольниками. Разобьём каждый четырёхугольник одной из его геодезических диагоналей на два треугольника. Относительно полученных таким образом треугольников, расположенных в H, существенно заметить следующее:



Черт. 14.

1) Площадь каждого треугольника больше $a\delta^2$ и меньше $b\delta^2$, где $a > 0$ и b — постоянные, не зависящие от δ;

2) внутри каждого треугольника можно указать такую точку, что геодезический круг радиуса $a_1\delta$ содержится внутри треугольника, а круг радиуса $b_1\delta$ содержит треугольник, причём постоянные a_1 и b_1 $(a_1 > 0)$ не зависят от δ.

Оба эти свойства довольно очевидны, если окрестность H точки X достаточно мала.

Сместим каждую вершину построенной триангуляции в достаточно близкую гладкую точку поверхности. Если полученные точки соединить кратчайшими по той же схеме, как были соединены соответствующие вершины, то получим триангуляцию T_δ окрестности точки X, причём топологически она выглядит так же, как и исходная триангуляция.

Будем употреблять для обозначения площади выпуклой поверхности как предела площадей сходящейся к ней последовательности многогранников обозначение S', а для площади в смысле внутреннего определения как интеграла (см. § 2 настоящей главы) обозначение S. Тогда можно считать, что для каждого треугольника Δ построенной триангуляции, содержащегося в H, выполняется неравенство

$$\lambda S(\Delta) < S'(\Delta) < \mu S(\Delta), \qquad (1)$$

где λ и μ — положительные постоянные, не зависящие от δ.

Построим последовательность многогранных выпуклых шапочек F_n с тем же основанием, что и F, сходящуюся к шапочке F. Поставим в соответствие каждой вершине триангуляции F гладкую точку многогранника F_n, близкую к этой вершине так, чтобы при $n \to \infty$ эти точки сходились к соответствующим вершинам. Соединим отмеченные точки на многограннике F_n в том же порядке, как соединены соответствующие вершины на шапочке F. При этом, если n достаточно велико, получается триангуляция $T_{n\delta}$ на F_n, топологически устроенная так же, как и триангуляция T_δ на F.

Пусть M — замкнутое множество на F, содержащееся в области G, удовлетворяющее условиям:

$$\frac{S'(G)}{S'(M)} < 1 + \varepsilon_1, \qquad \frac{S(G)}{S(M)} < 1 + \varepsilon_1, \qquad (2)$$

и G_1 — открытое множество, содержащее M, с замыканием $\overline{G_1}$, содержащимся в G. При достаточно малом δ из треугольников триангуляции T_δ можно построить замкнутые множества M' и M'', удовлетворяющие условиям:

$$M \subset M' \subset G_1, \qquad \overline{G}_1 \subset M'' \subset G.$$

Пусть M'_n и M''_n — замкнутые множества на многогранной шапочке F_n, построенные из соответствующих треугольников триангуляции $T_{n\delta}$. Внешняя кривизна множества M'_n представляет собой сумму внешних кривизн треугольников Δ' триангуляции $T_{n\delta}$, принадлежащих M'_n. Кривизна каждого такого треугольника равна $\pi - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n$, где α_n, β_n и γ_n — углы треугольника. При $n \to \infty$ углы α_n, β_n, γ_n треугольника $\Delta' \subset T_{n\delta}$ сходятся к углам α, β, γ соответствующего треугольника $\Delta \subset T_\delta$ (теорема 5 § 3 гл. I). И так как $\pi - \alpha - \beta - \gamma = \int\limits_\Delta K\,dS$ (теорема Гаусса), а сферическое изображение M_n' при достаточно большом n содержится в сферическом изображении G_1 (лемма 3), то

$$\int_{M'} K\,dS \leqslant \omega(G), \tag{3}$$

откуда следует, что

$$\int_{G} K\,dS \leqslant \omega(G). \tag{4}$$

Неравенство (3) можно записать в виде

$$\sum_{\Delta \subset M'} K_\Delta S(\Delta) \leqslant \omega(G), \tag{5}$$

где K_Δ — некоторое среднее значение гауссовой кривизны поверхности в треугольнике Δ, а суммирование распространяется на треугольники из T_δ, принадлежащие M'. Из неравенства (5), принимая во внимание положительность гауссовой кривизны и свойства 1, 2 триангуляции T_δ, с помощью леммы 1 предыдущего параграфа получаем

$$c_1 \sum_{\Delta \subset M'} S'(\Delta) \leqslant \omega(G), \tag{6}$$

где c_1 — положительная постоянная, не зависящая от δ и области G. Так как M — произвольное множество, удовлетворяющее условию (2), то из (6) следует

$$c_1 S'(G) \leqslant \omega(G). \tag{7}$$

По теореме 2 § 1 настоящей главы из неравенства (7) следует, что поверхность G, а следовательно вся шапочка F, существенно выпуклая. Итак, попутно нами получена следующая

Теорема 2. *Выпуклая шапочка с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной является существенно выпуклой в том смысле, что каждая её опорная плоскость имеет с шапочкой только одну общую точку.*

Продолжим доказательство теоремы 1. Так как шапочка F существенно выпуклая, то при достаточно большом n сферическое изображение множества M_n'' покрывает сферическое изображение множества M' (лемма 4). Отсюда, подобно предыдущему, получаем

$$\int_{M''} K\,dS \geqslant \omega(M') \tag{3'}$$

и соответственно

$$\int_G K\,dS \geqslant \omega(M'), \tag{4'}$$

$$\sum_{\Delta \subset M''} K_\Delta S(\Delta) \geqslant \omega(M'), \tag{5'}$$

$$c_2 \sum_{\Delta \subset M''} S'(\Delta) \geqslant \omega(M'), \tag{6'}$$

$$c_2 S'(G) \geqslant \omega(M'). \tag{7'}$$

Из неравенства (4′) и произвольности ε_1 в условии (2) следует:

$$\int_G K\,dS \geqslant \omega(G),$$

что в соединении с неравенством (4) завершает доказательство теоремы 1.

Из неравенства (7′) и произвольности ε_1 следует неравенство

$$c_2 S'(G) \geqslant \omega(G).$$

С помощью теоремы 1 § 1 настоящей главы отсюда получается

Теорема 3. *Выпуклая шапочка с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной — гладкая.*

Так как достаточно малую окрестность каждой точки произвольной выпуклой поверхности можно считать принадлежащей некоторой выпуклой шапочке, то из теорем 2 и 3 следует

Теорема 4. *Выпуклая поверхность с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной — гладкая и существенно выпуклая.*

§ 4. Построение выпуклой поверхности с данной внешней кривизной

Имеет место следующая теорема А. Д. Александрова [5].

Теорема 1. *Пусть $\psi(m)$ — вполне аддитивная функция множеств плоскости xy, определённая для всех борелевских множеств этой плоскости, причём значение функции ψ для всей плоскости xy не превосходит 2π.*

Тогда существует бесконечная выпуклая поверхность, однозначно проектирующаяся на плоскость xy такая, что внешняя кривизна любого борелевского множества M на поверхности равна значению функции ψ для проекции этого множества на плоскость xy.

С помощью этой теоремы может быть доказана

Теорема 2. *Пусть M — любое множество плоскости xy меры нуль и $\overline{M}$ — любое ограниченное множество, содержащее M.*

Тогда имеется такая существенно выпуклая шапочка F, основание которой лежит в плоскости xy и покрывает множество $\overline{M}$, что удельная внешняя кривизна в каждой точке X шапочки, проекция которой (т. е. точки X) на плоскость xy принадлежит M, равна бесконечности, а в остальных точках больше нуля.

Ввиду того что при доказательстве теоремы 2 теорема 1 не используется в полном объёме, мы ограничимся доказательством следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть c — замкнутая ломаная в полупространстве $z>0$, однозначно проектирующаяся на плоскость xy в выпуклую ломаную $\bar{c}$, ограничивающую выпуклый многоугольник G. Пусть, далее, в многоугольнике G заданы точки $\overline{A}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и каждой точке $\overline{A}_i$ поставлено в соответствие число ω_i, причём $\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_n<2\pi$.*

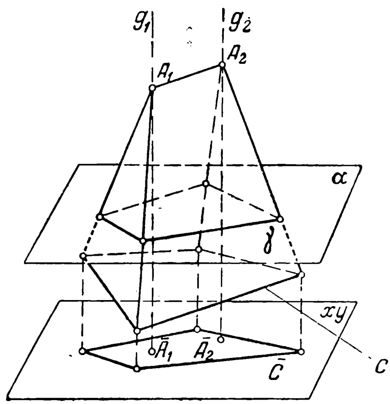
Тогда существует выпуклый многогранник с границей c, однозначно проектирующийся на плоскость xy, с вершинами, проектирующимися в точки $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n$ и внешними кривизнами в этих вершинах $\omega_1, \ldots, \omega_n$ соответственно (черт. 15).

Доказательство. Проведём через точки $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n$ прямые $g_1, \ldots, g_n$, параллельные оси z.

Рассмотрим теперь все выпуклые многогранники с границей c, обращённые выпуклостью в сторону $z>0$, с вершинами на прямых $g_1, \ldots, g_n$ и внешними кривизнами в этих вершинах не больше $\omega_1, \ldots, \omega_n$ соответственно. Совокупность таких многогранников обозначим T. В том, что T не пусто, можно убедиться, рассмотрев область, ограниченную ломаной c

на выпуклой оболочке ломаной c и отрицательной полуоси z. Эта область представляет собой многогранник с границей c без вершин.

Многогранники P из T ограничены в совокупности. В самом деле, все они расположены над плоскостью xy внутри цилиндрической поверхности Z с образующими, параллельными оси z, проведённой через ломаную c. Проведём плоскость α над ломаной c, параллельную плоскости xy. Пусть γ — выпуклый многоугольник, по которому эта плоскость пересекает многогранник P, и A — наиболее удалённая от плоскости α вершина многогранника P. Внешняя кривизна в вершине многогранного угла, проектирующего многоугольник γ из точки A, не больше внешней кривизны многогранника P, а последняя в свою очередь не больше $\omega_1 + \ldots + \omega_n < 2\pi$. Вместе с тем, если вершина A достаточно удалена от плоскости α, внешняя кривизна многогранного угла, проектирующего γ, будет сколь угодно близка к 2π. Таким образом, вершина A не может быть как угодно далеко от плоскости α, и следовательно, многогранники из T ограничены в совокупности.



Черт. 15.

Отнесём каждому многограннику P из T число $s(P)$, равное сумме расстояний от плоскости xy всех точек многогранника, лежащих на прямых $g_1, \ldots, g_n$, даже если некоторые из них не являются вершинами.

Среди многогранников P из T существует многогранник P_0, для которого число $s(P)$ имеет наибольшее значение. Покажем, что P_0 и есть тот многогранник, существование которого утверждается теоремой. Действительно, многогранник P_0 имеет границей ломаную c, его вершины лежат на прямых g_i и, следовательно, проектируются в заданные точки $\bar{A}_i$, кривизна в каждой вершине, лежащей на прямой g_i, не больше ω_i. Покажем, что она равна ω_i.

Допустим, что в вершине A_k многогранника P_0, лежащей на прямой g_k, внешняя кривизна меньше ω_k. Сместим эту вершину вверх по прямой g_k на малое расстояние δ. При этом внешние кривизны во всех вершинах, кроме A_k, не увеличиваются. И если взять δ достаточно малым, то внешняя кривизна в вершине A_k хотя и увеличится, но всё же останется меньше ω_k. А так как при смещении вершины A_k вверх $s(P)$ увеличивается, то для P_0 максимум $s(P)$ не достигается. Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Не ограничивая общности, можно считать, что множество $\overline{M}$ заключено внутри квадрата c_1, ограниченного прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$.

Построим последовательность открытых множеств G_k, удовлетворяющих следующим условиям:

1) G_1 — квадрат c_1 без границы;

2) $G_k \subset G_{k-1}$;

3) мера (площадь) G_k не больше $\frac{a^2}{4^k}$;

4) множество M содержится в каждом G_k.

Разобьём теперь квадрат c_1 на маленькие квадраты со сторонами $\delta_n = \frac{a}{2^n}$ прямыми, параллельными сторонам квадрата c_1. Совокупность всех квадратов этого разбиения обозначим T_n.

Отнесём каждой точке плоскости xy, являющейся центром квадрата из T_n, число 2^{k-2n}, если этот квадрат содержится в G_k, но не содержится в G_{k+1}. Легко проверить, что сумма всех чисел, отнесённых центрам квадратов из T_n, не превосходит единицы и, следовательно, меньше 2π.

Пусть c_2 — произвольная выпуклая замкнутая ломаная в плоскости xy, содержащая внутри себя квадрат c_1. Согласно теореме 3 существует выпуклый многогранник P_n с границей c_2, вершины которого проектируются на плоскость xy в центры квадратов T_n и имеют внешние кривизны, равные числам, которые отнесены центрам квадратов.

Рассмотрим теперь последовательность многогранников $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Так как многогранники P_n ограничены в совокупности, то из последовательности P_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что сама последовательность P_n сходится. Пусть F — выпуклая поверхность, являющаяся пределом последовательности P_n.

Покажем, что удельная внешняя кривизна поверхности F в каждой точке X, которая на плоскость xy проектируется в точку множества M, равна бесконечности.

Пусть G — произвольная область на поверхности F, расположенная в достаточно малой окрестности H точки X, проекция которой на плоскость xy принадлежит множеству M. Обозначим через $\overline{G}$ проекцию области G на плоскость xy. Пусть $\overline{R}$ — замкнутое множество в $\overline{G}$ с площадью, не меньшей половины площади $\overline{G}$, и R — замкнутое множество на F, которое проектируется в $\overline{R}$. При достаточно большом n замкнутое множество $\overline{U}_n$, состоящее из квадратов, принадлежащих T_n и пересекающихся с $\overline{R}$, содержится внутри $\overline{G}$. Пусть U_n — замкнутое множество на многограннике P_n, проектирующееся в множество $\overline{U}_n$.

Так как $U_n \to R$ при $n \to \infty$ и R — замкнутое множество, то сферическое изображение U_n попадает при достаточно большом n в любую достаточно малую окрестность сферического изображения множества R. Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, \omega(U_n) \leqslant \omega(R) \leqslant \omega(G). \tag{1}$$

Оценим $\omega(U_n)$. Если окрестность H точки X достаточно мала, область $\overline{G}$ будет принадлежать открытому множеству G_k с достаточно большим номером k. Число квадратов из T_n, содержащихся в $\overline{U}_n$, не меньше $\frac{1}{2} S(\overline{G}) \frac{2^{2n}}{a^2}$, так как они покрывают больше половины площади $\overline{G}$. Так как над центром каждого квадрата расположена вершина многогранника P_n с кривизной не меньше 2^{k-2n}, то внешняя кривизна

$$\omega(U_n) \geqslant \frac{1}{2a^2} S(\overline{G})\, 2^k.$$

Далее, $S(G) \leqslant \frac{1}{\cos\vartheta_0} S(\overline{G})$, где ϑ_0 — наибольший угол, образуемый опорными плоскостями F в точках, принадлежащих H, с плоскостью xy. Поэтому

$$\omega(U_n) \geqslant \frac{\cos\vartheta_0}{2a^2} S(G)\, 2^k,$$

откуда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \omega(U_n) \geqslant \frac{\cos\vartheta_0}{2a^2} S(G)\, 2^k. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) следует:

$$\frac{\omega(G)}{S(G)} \geqslant \frac{\cos\vartheta_0}{2a^2} 2^k. \tag{3}$$

Если область G стягивается к точке X, то её проекция $\overline{G}$ в конце концов попадает внутрь области G_k с любым номером k, откуда следует, что

$$\frac{\omega(G)}{S(G)} \to \infty \quad \text{при} \quad G \to X.$$

Из неравенства (3) следует также, что удельная кривизна в произвольной точке X поверхности F положительна в том смысле, что

$$\varliminf_{G\to X} \frac{\omega(G)}{S(G)} > 0.$$

По теореме 2 § 1 настоящей главы отсюда следует, что шапочка F — существенно выпуклая.

Теорема доказана полностью.

§ 5. О верхней и нижней кривизнах выпуклых поверхностей

Для гладких точек выпуклой поверхности мы введём понятие верхней и нижней кривизн следующим образом.

Пусть F — выпуклая поверхность и X_0 — её гладкая точка, X — произвольная точка поверхности F, $h(X)$ — расстояние точки X от касательной плоскости α к поверхности в точке X_0, $d(X)$ — расстояние проекции точки X на плоскость α от точки X_0. Тогда под *верхней* (соответственно *нижней*) кривизной поверхности F в точке X_0 мы будем понимать *верхний* (соответственно *нижний*) предел отношения $\frac{2h(X)}{d^2(X)}$, когда $X \to X_0$.

Приведём несколько очевидных свойств верхней и нижней кривизн.

1. Пусть выпуклые поверхности F_1 и F_2 имеют общую точку X_0 и общую касательную плоскость в этой точке.

Тогда, если достаточно малая окрестность точки X_0 на поверхности F_1 лежит внутри поверхности F_2, то в X_0 верхняя и нижняя кривизны поверхности F_1 не меньше соответствующих кривизн поверхности F_2.

2. Если X_0 — точка на регулярной выпуклой поверхности, то верхняя (нижняя) кривизна в точке X_0 совпадает с наибольшей (соответственно наименьшей) кривизной нормальных сечений в этой точке. В частности, верхняя и нижняя кривизны в каждой точке сферы радиуса R равны $\frac{1}{R}$.

3. Если в гладкой точке X_0 выпуклой поверхности F нижняя кривизна положительна, то существует сфера, касающаяся поверхности F в точке X_0, причём достаточно малая окрестность точки X_0 на F находится внутри сферы. Если же в точке X_0 верхняя кривизна ограничена, то существует сфера, касающаяся поверхности F в точке X_0, причём достаточно малая окрестность точки X_0 на сфере находится внутри поверхности F.

4. В соответствующих точках двух выпуклых поверхностей, полученных афинным преобразованием одна из другой, верхние (соответственно нижние) кривизны одновременно или конечны, или бесконечны, или равны нулю.

Это свойство вытекает из свойств 2 и 3.

5. Пусть F_1 и F_2 — две выпуклые поверхности, однозначно проектирующиеся на плоскость xy и обращённые выпуклостью в одну сторону, например в сторону отрицательных z. Пусть $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ — уравнения этих поверхностей. Тогда уравнение $z = z(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y)$ задаёт выпуклую поверхность F, обладающую следующими свойствами.

В гладкой точке $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ поверхности F нижняя кривизна положительна, если она положительна хотя бы в одной из двух точек $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_1)$ поверхности F_1 или $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_2)$ поверхности F_2.

В гладкой точке $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ поверхности F верхняя кривизна бесконечна, если она бесконечна хотя бы в одной из двух точек $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_1)$ поверхности F_1 или $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_2)$ поверхности F_2.

Для доказательства этого утверждения заметим, что оно очевидно, если плоскость xy является касательной к поверхностям F_1 и F_2 в точках $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_1)$ и $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_2)$ соответственно.

Рассмотрим общий случай. Пусть $z=\zeta_1(x, y)$ и $z=\zeta_2(x, y)$ — уравнения касательных плоскостей к поверхностям F_1 и F_2 в точках $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_1)$ и $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_2)$ соответственно. Для поверхностей F_1', F_2', F', задаваемых уравнениями $z=z_1-\zeta_1$, $z=z_2-\zeta_2$, $z=z_1+z_2-\zeta_1-\zeta_2$, согласно предыдущему замечанию свойство 5 имеет место. А так как поверхности F_1', F_2', F' получены очевидными афинными преобразованиями из F_1, F_2 и F, то оно должно иметь место и для F_1', F_2', F'.

Нижеследующие две теоремы устанавливают некоторую связь между удельной внешней кривизной поверхности и её верхней и нижней кривизнами.

Теорема 1. *Если в гладкой точке X_0 выпуклой поверхности F нижняя кривизна положительна, а удельная внешняя кривизна ограничена, то верхняя кривизна в точке X_0 тоже ограничена.*

Теорема 2. *Если поверхность F — существенно выпуклая и в гладкой точке X_0 имеет бесконечную удельную внешнюю кривизну, то верхняя кривизна в этой точке бесконечна.*

Доказательство теоремы 1. Проведём касательную плоскость α к поверхности в точке X_0 и обозначим через $h(X)$ расстояние произвольной точки X поверхности F от плоскости α, через $d(X)$ — расстояние её проекции на плоскость α от точки X_0.

Допустим, что теорема неверна. Тогда существует последовательность точек X_k, сходящаяся к X_0, такая, что

$$\lambda_k=\frac{h(X_k)}{d^2(X_k)} \to \infty, \quad \text{когда} \quad k \to \infty.$$

Покажем, что в таком случае существует последовательность областей на поверхности F, сходящихся к точке X_0, удельные внешние кривизны которых неограниченно растут. Для этого от поверхности F отрежем шапочку F_k плоскостью, параллельной плоскости α и проходящей через точку X_k. Оценим удельную внешнюю кривизну шапочки F_k.

Так как нижняя кривизна поверхности F в точке X_0 положительна, то существует положительная постоянная c_1 такая, что для всех точек X, достаточно близких к X_0, имеем $c_1 < \frac{h(X)}{d^2(X)}$, и, следовательно, $d(X) < \sqrt{\frac{h(X)}{c_1}}$.

Построим конус K, проектирующий основание шапочки F_k из точки X_0. Внешняя кривизна конуса K меньше внешней кривизны шапочки.

Опишем около конуса K трёхгранный угол следующим образом. Первую грань проведём через образующую конуса X_0X_k. Две другие грани угла проведём касательно к конусу K и так, чтобы их следы на плоскости основания шапочки F_k были перпендикулярны к следу первой грани.

Внешняя кривизна трёхгранного угла меньше, чем кривизна конуса K, и, следовательно, меньше внешней кривизны шапочки F_k.

Оценим кривизну трёхгранного угла.

Пусть Y_2 — точка основания шапочки F_k, лежащая во второй грани трёхгранного угла, h_k — высота шапочки. Тогда $c_1 < \frac{h_k}{d^2(Y_2)}$. Отсюда

$$\sqrt{c_1 h_k} < \frac{h_k}{d(y_2)} \leqslant \operatorname{tg} \varphi_2,$$

где φ_2 — угол, образуемый второй гранью трёхгранного угла и плоскостью α. Аналогично для угла φ_3, образуемого третьей гранью и плоскостью α, имеем

$$\sqrt{c_1 h_k} < \operatorname{tg} \varphi_3.$$

И, наконец, для угла φ_1, образуемого первой гранью трёхгранного угла и плоскостью α, получим:

$$\sqrt{\lambda_k h_k} < \operatorname{tg} \varphi_1.$$

Принимая во внимание малость углов φ_1, φ_2, φ_3, можно считать:

$$\varphi_1 > 2\sqrt{\lambda_k h_k}, \qquad \varphi_2 + \varphi_3 > 4\sqrt{c_1 h_k}.$$

Сферическое изображение трёхгранного угла есть сферический треугольник с основанием $\varphi_2 + \varphi_3$ и высотой φ_1. Площадь этого треугольника не меньше

$$\frac{1}{2}\varphi_1(\varphi_2 + \varphi_3) > 4h_k\sqrt{c_1\lambda_k}.$$

Если высота h_k шапочки F_k достаточно мала, то её площадь мало отличается от площади её основания. Во всяком случае, она не больше удвоенной площади основания. А так как для всех точек X поверхности F, принадлежащих основанию шапочки с высотой h_k,

$$d(X) < \sqrt{\frac{h_k}{c_1}},$$

то площадь основания шапочки не больше площади круга радиуса $\sqrt{\frac{h_k}{c_1}}$ и, следовательно, для площади шапочки достаточно малой высоты h_k получается оценка

$$S(F_k) < 2\pi\frac{h_k}{c_1}.$$

Внешняя кривизна $\omega(F_k)$ шапочки F_k не меньше кривизны трёхгранного угла и, следовательно, не меньше $4h_k\sqrt{c_1\lambda_k}$. Поэтому удельная кривизна шапочки

$$\frac{\omega(F_k)}{S(F_k)} > \frac{2}{\pi}\sqrt{c_1^3\lambda_k}$$

и неограниченно растёт при $k \to \infty$, так как $\lambda_k \to \infty$ по предположению. Мы пришли к противоречию с условием теоремы об ограниченности удельной внешней кривизны.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Допустим, что теорема неверна. Тогда, сохраняя предыдущие обозначения для всех X из достаточно малой окрестности точки X_0 на F, будем иметь

$$\frac{h(X)}{d^2(X)} < c_2,$$

где c_2 — некоторая постоянная.

Построим сферу, касающуюся поверхности F в точке X_0, расположенную по ту же сторону касательной плоскости α, что и поверхность F, такую, чтобы некоторая окрестность точки X_0 на поверхности была вне сферы. Это возможно, так как по предположению верхняя кривизна поверхности F в точке X_0 конечна.

Возьмём на внешней нормали поверхности F в точке X_0 точку S и построим два конуса, проектирующих сферу и поверхность F соответственно. Пусть $\sigma(S)$ — площадь той части поверхности F, которая видна из точки S; $\bar{\sigma}(S)$ — площадь части сферы, которую видно из S; $f(S)$ — площадь области плоскости α, которая находится внутри конуса, проектирующего сферу; $\omega(S)$ — внешняя кривизна конуса, проектирующего поверхность; $\bar{\omega}(S)$ — внешняя кривизна конуса, проектирующего сферу.

Если точка S достаточно близка к X_0, то конус, проектирующий сферу, содержится внутри конуса, проектирующего поверхность. Поэтому

$$\omega(S) < \bar{\omega}(S).$$

Далее,

$$\sigma(S) > f(S),\ f(S) > c'\bar{\sigma}(S),\ \frac{\bar{\omega}(S)}{\bar{\sigma}(S)} < \frac{1}{R^2},$$

где c' — некоторая абсолютная постоянная, а R — радиус сферы.

Из последних четырёх неравенств как следствие получаем

$$\frac{\omega(S)}{\sigma(S)} < \frac{1}{c'R^2}.$$

Чтобы обнаружить в этом противоречие, достаточно показать, что та часть поверхности F, которая видна из точки S, стягивается к точке X_0, когда S приближается к X_0. Но это действительно так, ибо в противном случае на F существовал бы прямолинейный отрезок, содержащий точку X_0, что невозможно, так как поверхность F — существенно выпуклая.

Теорема 2 доказана.

В ходе доказательства однозначной определённости шапочек нам понадобится одна поверхность, существование которой обеспечивает следующая

Теорема 3. *Пусть M — любое множество меры нуль в плоскости xy и $\overline{M}$ — любое ограниченное множество, содержащее M.*

Тогда существует выпуклая шапочка Ω с основанием в плоскости xy, покрывающим множество $\overline{M}$, причём нижняя кривизна шапочки во всех гладких точках положительна, а верхняя кривизна в точках, проектирующихся в точки множества M, бесконечна.

Доказательство. Согласно теореме 2 предыдущего параграфа существует шапочка F с основанием в плоскости xy, покрывающим ε-окрестность множества $\overline{M}$, причём внешняя удельная кривизна её бесконечна в каждой точке, которая проектируется в точку множества M.

Пусть $z = f(x, y)$ — уравнение этой шапочки. Рассмотрим выпуклую поверхность, заданную равенством

$$z = f(x, y) - \varepsilon - \varepsilon^2 (x^2 + y^2).$$

При достаточно малом ε часть этой поверхности, расположенная над плоскостью xy, представляет собой выпуклую шапочку Ω, основание которой лежит в плоскости xy и покрывает множество $\overline{M}$. В силу теоремы 2 и свойства 5 верхней и нижней кривизн в каждой гладкой точке шапочки Ω нижняя кривизна положительна, а в каждой гладкой точке, проектирующейся в точку множества M, верхняя кривизна равна бесконечности.

Теорема доказана.

ГЛАВА III

ОДНОЗНАЧНАЯ ОПРЕДЕЛЁННОСТЬ ВЫПУКЛЫХ ШАПОЧЕК

§ 1. Идея доказательства однозначной определённости выпуклых шапочек и формулировка вспомогательных предложений

Решающее значение при доказательстве регулярности ыпуклых поверхностей с регулярной метрикой и положиельной гауссовой кривизной имеет следующая теорема об днозначной определённости выпуклых шапочек.

Теорема 1. *Пусть F_1 — выпуклая шапочка с регуярной метрикой и положительной гауссовой кривизной, $_2$ — выпуклая шапочка, изометричная F_1.*

Тогда шапочка F_1 равна шапочке F_2.

Идея доказательства этой теоремы в общих чертах сотоит в следующем.

Расположим обе шапочки F_1 и F_2 так, чтобы их основания лежали в плоскости xy и сами шапочки были в поупространстве $z > 0$. Пусть $z_1(X)$ — расстояние произвольой точки X шапочки F_1 от плоскости xy и $z_2(X)$ — растояние от плоскости xy соответствующей по изометрии очки шапочки F_2. Априори могут представиться две возожности:

1) $z_1(X) = z_2(X)$ для всех X;

2) $z_1(X) \neq z_2(X)$ для некоторых X.

Рассмотрим первый случай. Итак, пусть для всех X $_1(X) = z_2(X)$.

Проведём через две произвольные точки X_1 и Y_1 шаочки F_1 плоскость, перпендикулярную к плоскости xy. Эта плоскость рассекает поверхность по выпуклой кривой. Отрезок этой кривой между X_1 и Y_1 обозначим через γ_1. Пусть γ_2 — соответствующая кривая на шапочке F_2, соединяющая точки X_2 и Y_2, соответствующие точкам X_1 и Y_1. Развернём проектирующий в направлении оси z кривую γ_2 цилиндр Z на плоскость. Так как $z_1(X) \equiv z_2(X)$, то кривая γ_2 переходит при этом в плоскую кривую, равную γ_1.

При развёртывании цилиндра Z на плоскость пространственное расстояние между точками X_2 и Y_2 не уменьшается. Поэтому пространственное расстояние между точками X_2 и Y_2 поверхности F_2 не больше пространственного расстояния между соответствующими им по изометрии точками X_1 и Y_1 поверхности F_1.

Поменяв роли шапочек F_1 и F_2, придём к обратному неравенству. Отсюда следует, что пространственное расстояние между точками X_1 и Y_1 равно пространственному расстоянию между точками X_2 и Y_2. Но это значит, что шапочки F_1 и F_2 равны.

Оказывается, что рассмотренный случай является единственно возможным при таком расположении шапочек F_1 и F_2. Для того чтобы понять существо дела, предположим, что шапочки F_1 и F_2 регулярны и близки в смысле близости второго порядка.

Введём на шапочках координаты u, v так, чтобы соответствующим по изометрии точкам соответствовали одинаковые координаты. Пусть $r_1(u, v)$ — радиус-вектор произвольной точки шапочки F_1, а $r_2(u, v)$ — радиус-вектор соответствующей по изометрии точки шапочки F_2.

Рассмотрим две вектор-функции:

$$r(u, v) = \frac{1}{2}[r_1(u, v) + r_2(u, v)]$$

и

$$\tau(u, v) = \frac{1}{2}[r_1(u, v) + \overset{*}{r}_2(u, v)],$$

где $\overset{*}{r}_2(u, v)$ — зеркальное изображение вектора $r_2(u, v)$ в плоскости xy. Очевидно, если шапочка F_2 достаточна близка к F_1, векторное уравнение

$$r = r(u, v)$$

задаёт некоторую выпуклую шапочку F с положительной гауссовой кривизной, близкую к F_1.

Оказывается, векторное уравнение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\tau}(u, v)$$

задаёт некоторую поверхность Φ с неположительной гауссовой кривизной, в чём нетрудно убедиться следующим образом.

Пусть $z = z(x, y)$ — уравнение поверхности F в прямоугольных декартовых координатах, $z = \zeta(x, y)$ — уравнение поверхности Φ. Полагая $\boldsymbol{t}(u, v) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{r}_1(u, v) - \boldsymbol{r}_2(u, v)\right]$, в силу изометрии поверхностей F_1 и F_2 будем иметь:

$$d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{t} = 0,$$

что эквивалентно следующей системе:

$$\begin{aligned} &\xi_x + z_x\zeta_x = 0, \\ &\xi_y + \eta_x + z_x\zeta_y + z_y\zeta_x = 0, \\ &\eta_y + z_y\eta_y = 0, \end{aligned}$$

где ξ, η, ζ — компоненты вектора $\boldsymbol{t}(u, v)$ по осям x, y, z (компонента по оси z у векторов $\boldsymbol{t}(u, v)$ и $\boldsymbol{\tau}(u, v)$ одинакова). Исключая из этих равенств ξ и η, получим:

$$z_{xx}\zeta_{yy} - 2z_{xy}\zeta_{xy} + z_{yy}\zeta_{xx} = 0. \qquad (1)$$

Так как гауссова кривизна поверхности F положительна, то $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 > 0$, а тогда, как известно, из равенства (1) следует $\zeta_{xx}\zeta_{yy} - \zeta_{xy}^2 \leqslant 0$; но это значит, что поверхность Φ имеет неположительную кривизну, и, следовательно, должна лежать в плоскости xy, так как граница её лежит в этой плоскости.

Таким образом, компонента вектора $r_1(u, v) + \overset{*}{r}_2(u, v)$ по оси z равна нулю для всех u, v. Но это значит, что $z_1(u, v) = z_2(u, v)$ для всех u, v.

Доказательство теоремы 1 мы разобьём на три вспомогательных предложения, доказательство которых дано в следующих трёх параграфах настоящей главы.

Лемма 1. *Пусть F_1 и F_2 — изометричные выпуклые поверхности с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной, однозначно проектирующиеся на* *плоскость* xy, *обращённые выпуклостью в сторону* $z<0$. *Пусть, далее,* $\boldsymbol{r}_1(X)$ — *радиус-вектор произвольной точки* X *поверхности* F_1, $\boldsymbol{r}_2(X)$ — *радиус-вектор соответствующей по изометрии точки поверхности* F_2, $z_1(X)$ *и* $z_2(X)$ — *компоненты по оси* z *векторов* $\boldsymbol{r}_1(X)$ *и* $\boldsymbol{r}_2(X)$.

Тогда, если максимум функции $z(X)=z_1(X)-z_2(X)$ *не достигается на границе поверхности* F_1, *то вращением около оси* z, *параллельным переносом и зеркальным отражением в плоскости, параллельной оси* z, *можно поверхности* F_1 *и* F_2 *расположить так, что для них в этом новом расположении будут выполняться следующие условия:*

1) *в начале координат* O *совпадают две соответствующие по изометрии точки* X_0 *и* X_0' *поверхностей* F_1 *и* F_2;

2) *в этой общей точке* O *соответствующие по изометрии направления на поверхностях совпадают;*

3) *обе поверхности расположены по одну сторону их общей касательной плоскости в точке* O, *причём эта плоскость не перпендикулярна к плоскости* xy;

4) *для всех точек* X *поверхности* F_1 *имеет место неравенство* $z_1(X)-z_2(X)\leqslant 0$, *причём, если конец вектора* $\boldsymbol{r}(X)=\boldsymbol{r}_1(X)+\boldsymbol{r}_2(X)$ *проектируется в точку полуплоскости* $x>0$ *или на ось* y, *исключая точку* O, *то* $z_1(X)-z_2(X)<0$.

Прежде чем сформулировать лемму 2, введём одно понятие. Точку X выпуклой поверхности F с регулярной метрикой будем называть *регулярной*, если существует счётное всюду плотное множество геодезических, проходящих через точку X, такое, что радиус-вектор точки поверхности имеет вторую производную по дуге каждой геодезической этого множества в точке X.

Лемма 2. *Пусть* F_1 *и* F_2 — *выпуклые поверхности, удовлетворяющие условиям леммы* 1.

Тогда движением эти поверхности можно расположить так, что в новом их расположении будут выполняться следующие условия:

1) *в начале координат* O *совпадают две соответствующие по изометрии регулярные точки* $\bar{X}$ *и* $\bar{X}'$ *поверхностей* F_1 *и* F_2;

2) *плоскость xy является общей касательной плоскостью поверхностей F_1 и F_2, причём обе поверхности расположены с одной стороны этой плоскости;*

3) *для всех точек X поверхности F_1, достаточно близких к точке $\overline{X}$,*

$$|z_1(X)-z_2(X)|>s^2(X) \qquad (c>0),$$

где $s(X)$ — расстояние между точками X и $\overline{X}$ на поверхности F_1.

Лемма 3. *Пусть F_1 и F_2 — изометричные выпуклые поверхности с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной, однозначно проектирующиеся на плоскость xy, обращённые выпуклостью в направлении $z<0$. Пусть, далее, $z_1(X)$ — координата z точки X поверхности F_1 и $z_2(X)$ — координата z соответствующей по изометрии точки поверхности F_2.*

Тогда, если функция $z(X)=z_1(X)-z_2(X)$ равна нулю для точек X границы поверхности F_1, то она равна нулю для всех X.

Теорема 1 легко следует из леммы 3. Действительно, выпуклая шапочка с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной является гладкой (теорема 3 § 3 гл. II). Расположим шапочки F_1 и F_2 так, чтобы их основания находились в плоскости xy, а сами шапочки в полупространстве $z>0$. Так как на границе шапочки F_1 имеем $z(X)=z_1(X)-z_2(X)=0$, то в силу леммы 3 $z(X)=0$ для всех X. Но отсюда следует, как показано в начале этого параграфа, что шапочки F_1 и F_2 равны.

§ 2. Доказательство леммы 1 § 1

Не ограничивая общности, можно считать, что поверхности F_1 и F_2 одинаково ориентированы. В противном случае поверхность F_2 можно зеркально отобразить в плоскости, параллельной оси z, и перейти к рассмотрению одинаково ориентированных поверхностей.

Обозначим через $r_1(X)$ радиус-вектор точки X поверхности F_1, $\overset{*}{r}_2(X)$ — радиус-вектор соответствующей по изометрии точки поверхности F_2^* — зеркального изображения поверхности F_2 в плоскости xy.

Рассмотрим отображение поверхности F_1 в пространство с помощью вектор-функции $r(X) = r_1(X) + r_2^*(X)$. Образ поверхности F_1 при этом отображении представляет собой некоторое множество точек пространства, которые мы обозначим $r(F_1)$. Так как координата z точки $r(X)$ равна $z_1(X) - z_2(X)$, то существует плоскость $z = h$, обладающая следующими свойствами:

1) для всех точек X границы γ поверхности F_1 $z(X) \leqslant h$;

2) существуют точки X поверхности F_1, для которых $z(X) > h$.

Обозначим $m = \sup z(X)$ для $X \subset F_1$, и M_1 — множество тех точек на F_1, для которых $z(X) = m$. Пусть M_2 — множество точек на F_2, соответствующее по изометрии M_1.

Построим плоскости $z = h_1$ и $z = h_2$, упирающиеся в F_1 и F_2, соответственно, снизу.

Могут представиться два случая:

1) множество M_1 лежит в плоскости $z = h_1$;

2) есть точки, принадлежащие M_1, лежащие над плоскостью $z = h_1$.

Рассмотрим первый случай. Так как поверхность F_1 существенно выпуклая (теорема 4 § 3 гл. II), то M_1 состоит только из одной точки X_0 — точки касания плоскости $z = h_1$ с поверхностью F_1. В точке X_0 $dz_1 = 0$ и $dz = 0$. Поэтому $dz_2 = 0$. Следовательно, в соответствующей по изометрии точке X_0' на поверхности F_2 касательная плоскость тоже параллельна плоскости xy. Параллельным переносом и поворотом около оси z можно совместить поверхности F_1 и F_2 точками X_0 и X_0' и соответствующими по изометрии направлениями в этих точках. Если теперь перенести параллельно обе поверхности так, чтобы их общая точка $X_0 = X_0'$ совпала с точкой O — началом координат, то для поверхностей F_1 и F_2 в этом новом расположении действительно будут выполнены условия 1—4.

В рассматриваемом случае M_1 состоит из одной точки — начала координат.

Если $r(x)$ проектируется не в начало координат, то $X \neq 0$, а значит, $X \overline{\subset} M_1$, и тогда $z_1(x) - z_2(x) < 0$.

Во втором случае есть точки, принадлежащие множеству M_1, лежащие над плоскостью $z=h_1$. Обозначим

$$c_1 = \sup z_1(X), \quad c_2 = \sup z_2(X) \text{ для } X \subset M_1.$$

Проведём плоскости $z=c_1$ и $z=c_2$. По определению чисел c_1 и c_2 нет точек из M_1, лежащих над плоскостью $z=c_1$, но так как M_1 — замкнутое множество, то существует замкнутое его подмножество $\overline{M}_1$, лежащее в плоскости $z=c_1$. Аналогично, нет точек в M_2, лежащих над плоскостью $z=c_2$, но есть точки, лежащие в этой плоскости; множество этих точек обозначим $\overline{M}_2$.

Пусть $X \subset \overline{M}_1$. Тогда $z_1(X)=c_1$, $z_2(X) \leqslant c_2$. Поэтому $m=\sup[z_1(X)-z_2(X)] \geqslant c_1-c_2$. С другой стороны, пусть X — точка M_1, которой по изометрии на F_2 соответствует точка множества $\overline{M}_2$. Тогда $z_1(X) \leqslant c_1$, $z_2(X)=c_2$, и, следовательно, $m \leqslant c_1-c_2$. Отсюда следует, что $m=c_1-c_2$. Так как для всех X из $\overline{M}_1$ $z_1(X)=c_1$, а $m=c_1-c_2$, то множеству $\overline{M}_1$ поверхности F_1 по изометрии на поверхности F_2 соответствует $\overline{M}_2$.

Множество $\overline{M}_1$ расположено на линии γ_1 пересечения плоскости $z=c_1$ и поверхности F_1. Проведём в точке X_0 множества $\overline{M}_1$, лежащей на кривой γ_1, касательную к ней прямую g_1. Плоскость, параллельная оси z, проходящая через прямую g_1, очевидно, является опорной для множества M_1, и точка X_0 — единственная точка множества M_1, лежащая в этой плоскости (черт. 16).

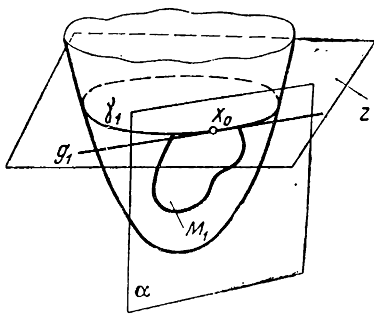
Так как точка X_0 принадлежит M_1, то в этой точке

$$\frac{d}{ds}(z_1(X)-z_2(X))=0,$$

где $\frac{d}{ds}$ обозначает дифференцирование по дуге любой геодезической на F_1, выходящей из точки X_0. Но $\frac{dz_1}{ds}=\cos\vartheta_1$, $\frac{dz_2}{ds}=\cos\vartheta_2$, где ϑ_1 и ϑ_2 — углы, образованные соответствующими по изометрии направлениями на поверхностях F_1 и F_2 в точках X_0 и X_0' с положительной полуосью z.

Плоскость $z = c_2$ пересекает поверхность F_2 по кривой γ_2, на которой лежит точка X_0'. Плоскость, параллельная оси z, проходящая через касательную к кривой γ_2 в точке X_0', является опорной для множества M_2, и точка X_0' — единственная точка множества M_2, лежащая в этой плоскости.

Так как соответствующие по изометрии направления на поверхностях F_1 и F_2 образуют с положительной полуосью z



Черт. 16.

одинаковые углы, то параллельным переносом и поворотом около оси, параллельной z, поверхности F_1 и F_2 можно совместить точками X_0 и X_0' и соответствующими по изометрии направлениями в этих точках. При этом обе поверхности будут находиться по одну сторону их общей касательной плоскости.

После такого совмещения поверхностей точками X_0 и X_0' и соответствующими по изометрии направлениями в этих точках перенесём параллельно обе поверхности одновременно так, чтобы их общая точка $X_0 \equiv X_0'$ совпала с началом координат O, а затем повернём их около оси z так, чтобы прямая g_1 совпала с осью y и множество M_1 проектировалось в полуплоскость $x \leqslant 0$. При этом множество M_2 тоже проектируется в полуплоскость $x \leqslant 0$. И так как на ось Y не проектируется ни одна точка множества M_1, кроме X_0, которая совпадает с точкой O, то для поверхностей F_1 и F_2 в этом расположении действительно выполняются условия 1—4.

Лемма доказана.

§ 3. Доказательство леммы 2 § 1

Во-первых, покажем, что почти все точки поверхности F_1, а также поверхности F_2 — регулярные в смысле определения, данного в § 1 настоящей главы.

Ограничиваясь рассмотрением достаточно малой окрестности G точки X_0 поверхности F_1, проведём через эту точку счётное всюду плотное множество геодезических $\bar{\gamma}$. Пусть $M(\bar{\gamma})$ — множество всех геодезических, перпендикулярных к геодезической $\bar{\gamma}$. Очевидно, через каждую точку X достаточно малой окрестности точки X_0 проходит одна геодезическая из множества $M(\bar{\gamma})$. Вдоль каждой из этих геодезических вектор-функция $\boldsymbol{r}(X)$ почти всюду имеет ограниченную вторую производную, т. е. множество тех точек геодезической, в которых вторая производная $\boldsymbol{r}(X)$ по дуге не существует или бесконечна, имеет линейную меру нуль. Отсюда по известной теореме следует, что $\boldsymbol{r}(X)$ почти всюду (в смысле поверхностной меры) имеет конечную вторую производную по дугам геодезических семейства $M(\bar{\gamma})$. Так как множество семейств $M(\bar{\gamma})$ счётно, то почти во всех точках окрестности G точки X_0 вектор-функция $\boldsymbol{r}(X)$ имеет вторую производную по дуге геодезической любого семейства $M(\bar{\gamma})$, проходящей через точку X.

Доказательство для поверхности F_2 аналогично.

Рассмотрим теперь поверхности F_1 и F_2 в расположении, существование которого утверждается леммой 1. Пусть ω_1 есть ε-окрестность точки O на F_1 и ω_2 — соответствующая по изометрии окрестность на F_2, γ_1 и γ_2 — границы этих областей.

Согласно теореме 2 § 4 гл. I вектор $\boldsymbol{r}(X) = \boldsymbol{r}_1(X) + \overset{*}{\boldsymbol{r}}_2(X)$ можно представить следующим образом:

$$\boldsymbol{r}(X) = [\boldsymbol{\tau}_1(X) + \overset{*}{\boldsymbol{\tau}}_2(X)]\, s(X) + \boldsymbol{b}(X),$$

где $\boldsymbol{\tau}_1(X)$ — единичный касательный вектор кратчайшей, соединяющей точки O и X на поверхности F_1, в точке O, $\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}_2(X)$ — единичный касательный вектор в точке O к соответствующей по изометрии кратчайшей на F_2, $s(X)$ — расстояние между точками X и O на поверхности F_1, $\boldsymbol{b}(X)$ — некоторый вектор, причём $\frac{\boldsymbol{b}(X)}{s(X)} \to 0$, когда $X \to O$.

Так как вектор $\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}_2(X)$ является зеркальным изображением вектора $\boldsymbol{\tau}_2(X)$ в плоскости xy, то $|\boldsymbol{\tau}_1(X) + \overset{*}{\boldsymbol{\tau}}_2(X)| > \delta$ для всех X, причём δ зависит только от угла наклона общей касательной плоскости поверхностей F_1 и F_2 в точке O с плоскостью xy. Отсюда следует, что проекция образа $\boldsymbol{r}(\gamma_1)$ кривой γ_1, ограничивающей ε-окрестность точки O на F_1, на плоскость xy лежит вне круга радиуса $\rho_\varepsilon > 0$ с центром в точке O.

Согласно свойству 4 взаимного расположения поверхностей F_1 и F_2 (см. формулировку леммы 1) все точки множества $\boldsymbol{r}(\omega_1)$ лежат в полупространстве $z \leqslant 0$, причём те из них, которые проектируются на полуплоскость $x \geqslant 0$, кроме точки O, лежат ниже плоскости xy, т. е. в полупространстве $z < 0$. Отсюда следует, что при достаточно малом $\bar{\varepsilon} > 0$ те точки кривой $\boldsymbol{r}(\gamma_1)$, которые проектируются на полуплоскость $x \geqslant -\bar{\varepsilon}$, лежат существенно ниже плоскости xy.

Проведём плоскость α через прямую $x = -\bar{\varepsilon}$, образующую малый угол с плоскостью xy так, чтобы начало координат O находилось над плоскостью α, а вся кривая $\boldsymbol{r}(\gamma_1)$ — под этой плоскостью.

Определим множество W на поверхности ω_1 следующим образом. Точку X поверхности ω_1 отнесём множеству W, если она сама нерегулярна или нерегулярна соответствующая ей по изометрии точка поверхности F_2. Это множество имеет меру нуль.

Определим теперь множество M в плоскости xy. Точку P плоскости xy отнесём множеству M, если в W найдётся точка X такая, что $\boldsymbol{r}(X)$ проектируется в P.

Покажем, что множество M тоже имеет меру нуль. Действительно, множество W на ω_1 можно покрыть малыми геодезическими кругами сколь угодно малой общей площади. Пусть $\varkappa$ — один из таких кругов с радиусом ρ и центром Q. Если ρ достаточно мало, то площадь $\sigma(\varkappa)$ круга $\varkappa$ не меньше $\frac{\pi\rho^2}{2}$. Очевидно, $\boldsymbol{r}(\varkappa)$ содержится в шаре радиуса 2ρ с центром $\boldsymbol{r}(Q)$. Следовательно, проекция множества $\boldsymbol{r}(\varkappa)$ на плоскость xy покрывается кругом с площадью $16\pi\rho^2$. Так как общая площадь кругов $\varkappa$ может быть сделана сколь угодно малой, то общую площадь кругов, покрывающих множество M, тоже можно сделать как угодно малой. А это значит, что множество M имеет меру нуль.

Так как каждая точка X из ω_1 удалена от точки O на расстояние, не превосходящее ε, то множество $\boldsymbol{r}(\omega_1)$ проектируется на плоскость xy существенно внутрь круга радиуса 3ε.

Согласно теореме 3 § 5 гл. II существует выпуклая поверхность $z = z(x, y)$, обращённая выпуклостью в направлении $z > 0$ и такая, что в каждой гладкой точке X поверхности, которая отстоит от оси z на расстояние, не превосходящее 3ε, нижняя кривизна положительна, а верхняя кривизна в гладких точках, проектирующихся в точки множества M, бесконечна. Обозначим эту поверхность F.

Сместим поверхность F в направлении $z > 0$ настолько, чтобы она находилась над множеством $\boldsymbol{r}(\omega_1)$. А теперь будем её аффинно «прижимать» к плоскости α, разбивающей это множество, т. е. подвергнем её аффинной деформации, при которой точки поверхности приближаются к плоскости α, двигаясь по прямым, параллельным оси z. При такой деформации поверхности F отмеченные выше свойства её нижней и верхней кривизн сохраняются. В некоторый момент деформации поверхность коснётся точки $\boldsymbol{r}(\bar{X})$ множества $\boldsymbol{r}(\omega_1)$, лежащей над плоскостью α.

Согласно теореме 2 § 4 гл. I вектор-функция $\boldsymbol{r}(X)$ для X, близких к $\bar{X}$, допускает следующее представление:

$$\boldsymbol{r}(X) = \boldsymbol{r}(\bar{X}) + (\boldsymbol{\tau}_1(X) + \overset{*}{\boldsymbol{\tau}}_2(X))\, s(X) + \boldsymbol{\nu}_1(X) + \overset{*}{\boldsymbol{\nu}}_2(X),$$

причём $\frac{\boldsymbol{\nu}_1(X)}{s(X)}$ и $\frac{\overset{*}{\boldsymbol{\nu}}_2(X)}{s(X)} \to 0$, когда $X \to \bar{X}$. Так как соответствующие по изометрии направления в точке $\bar{X}$ поверхности ω_1 и в соответствующей по изометрии точке поверхности ω_2 близки, а касательная плоскость к ω_1 в точке $\bar{X}$ близка к касательной плоскости в точке O, то $\boldsymbol{\tau}_1(X) + \overset{*}{\boldsymbol{\tau}}_2(X)$ при достаточной близости точки $\bar{X}$ к O не обращается в нуль ни для какого X. Отсюда следует, что точка $\boldsymbol{r}(\bar{X})$ поверхности F является гладкой.

Далее, для X, достаточно близких к $\overline{X}$, имеем

$$|\boldsymbol{r}(X)-\boldsymbol{r}(\overline{X})|>c_1 s(X),$$

где c_1 — некоторая положительная постоянная.

Пусть $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\overset{*}{\boldsymbol{n}}_2$, $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы внешних нормалей поверхностей ω_1, ω_2, $\overset{*}{\omega}_2$ и F в точках $\boldsymbol{r}_1(\overline{X})$, $\boldsymbol{r}_2(\overline{X})$, $\overset{*}{\boldsymbol{r}}_2(\overline{X})$ и $\boldsymbol{r}(\overline{X})$ соответственно. Нормали $\boldsymbol{n}_1$, $\overset{*}{\boldsymbol{n}}_2$ и $\boldsymbol{n}$ будут в то же время нормалями плоских пучков векторов $\tau_1(X)$, $\overset{*}{\tau}_2(X)$ и $\tau_1(X)+\overset{*}{\tau}_2(X)$ соответственно.

Покажем, что $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}=-\overset{*}{\boldsymbol{n}}_2\boldsymbol{n}\neq 0$. Действительно, пусть τ_1 и τ_1' — два взаимно перпендикулярных вектора из пучка $\tau_1(X)$, $\overset{*}{\tau}_2$ и $\overset{*}{\tau}{}_2'$ — соответствующие им векторы из пучка $\overset{*}{\tau}_2(X)$. Положим:

$$A(\overline{X})=\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}=(\tau_1,\ \tau_1',\ \boldsymbol{n}),$$
$$B(\overline{X})=-\overset{*}{\boldsymbol{n}}_2\boldsymbol{n}=(\overset{*}{\tau}_2,\ \overset{*}{\tau}{}_2',\ \boldsymbol{n}).$$

Имеем:

$$A^2=1-(\tau_1\boldsymbol{n})^2-(\tau_1'\boldsymbol{n})^2;$$
$$B^2=1-(\overset{*}{\tau}_2\boldsymbol{n})^2-(\overset{*}{\tau}{}_2'\boldsymbol{n})^2.$$

Далее,

$$\tau_1\boldsymbol{n}+\overset{*}{\tau}_2\boldsymbol{n}=(\tau_1+\overset{*}{\tau}_2)\,\boldsymbol{n}=0;$$
$$\tau_1'\boldsymbol{n}+\overset{*}{\tau}{}_2'\boldsymbol{n}=(\tau_1'+\overset{*}{\tau}{}_2')\,\boldsymbol{n}=0.$$

Отсюда

$$A^2=B^2.$$

Покажем, что A и B отличны от нуля. Пусть $A=0$. Тогда $\boldsymbol{n}$ находится среди векторов $\tau_1(X)$. Примем его за вектор τ_1. Тогда, так как $\tau_1\boldsymbol{n}+\overset{*}{\tau}_2\boldsymbol{n}=0$, должно быть $\overset{*}{\tau}_2=-\boldsymbol{n}$. Но тогда $\tau_1+\overset{*}{\tau}_2=0$, что невозможно. Итак, $A^2=B^2\neq 0$. Так как $A(\overline{X})$ и $B(\overline{X})$ непрерывно зависят от $\overline{X}$, а при $\overline{X}=0$, очевидно, $A=B$, то это равенство имеет место и для $\overline{X}$, близких к O. Так как в точке $\boldsymbol{r}(\overline{X})$ нижняя кривизна поверхности F положительна, то

$$(\boldsymbol{r}(X)-\boldsymbol{r}(\overline{X}))\,\boldsymbol{n}=$$
$$=(\nu_1(X)+\overset{*}{\nu}_2(X))\,\boldsymbol{n}>c_1(\boldsymbol{r}(X)-\boldsymbol{r}(\overline{X}))^2>\beta_1 s^2(X), \quad (1)$$

где β_1 — положительная постоянная.

По теореме 2 § 4 гл. I направления векторов $\boldsymbol{\nu}_1(X)$ и $\boldsymbol{\nu}_2^*(X)$ равномерно сходятся к направлению нормалей $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2^*$, когда $X \to \overline{X}$. Поэтому (так как $\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2^*\boldsymbol{n} \neq 0$) при достаточно малом $s(X)$ величины $\boldsymbol{\nu}_1(X)\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\nu}_2^*(X)\boldsymbol{n}$ сохраняют знаки. Более того, они не могут быть одного знака. Не ограничивая общности, можно считать $\boldsymbol{\nu}_1(X)\boldsymbol{n} > 0$, $\boldsymbol{\nu}_2^*(X)\boldsymbol{n} \leqslant 0$. То, что в первом неравенстве надо ставить знак «больше», а не «больше или равно», следует из неравенства (1) и того, что величины $\boldsymbol{\nu}_1(X)\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\nu}_2^*(X)\boldsymbol{n}$ не могут быть одного знака. Из неравенства (1) получаем:

$$\boldsymbol{\nu}_1(X)\boldsymbol{n} > \beta_1 s^2(X). \qquad (2)$$

Отсюда $|\boldsymbol{\nu}_1(X)| \neq 0$, если $s(X)$ мало, но не равно нулю.

Разложим вектор $\boldsymbol{\nu}_1(X)$ на сумму двух векторов следующим образом:

$$\boldsymbol{\nu}_1(X) = \boldsymbol{n}_1\delta_1(X) + \boldsymbol{t}_1(X),$$

где $\delta_1(X)$ — расстояние точки X от касательной плоскости к поверхности ω_1 в точке $\overline{X}$. Имеем $\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nu}_1(X) = \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1\delta_1(X) + \boldsymbol{n}\boldsymbol{t}_1(X)$. Подставляя это выражение для $\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nu}_1(X)$ в неравенство (2), получаем:

$$\delta_1(X) = \frac{\beta_1 s^2(X)}{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1 + \dfrac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{t}_1(X)}{\delta_1(X)}}.$$

Так как $\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1 \neq 0$, а $\dfrac{\boldsymbol{t}_1(X)}{\delta_1(X)} \to 0$ при $s(X) \to 0$, то существует положительная постоянная β_2 такая, что

$$\delta_1(X) > \beta_2 s^2(X). \qquad (3)$$

Так как поверхность ω_1 имеет ограниченную удельную внешнюю кривизну, то из неравенства (3) в силу теоремы 1 § 5 гл. II следует существование постоянной β_3 такой, что

$$\delta_1(X) < \beta_3 s^2(X).$$

Отсюда

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nu}_1(X) < \beta_3' s^2(X).$$

Из этого неравенства и неравенства (1) следует

$$0 \leqslant \boldsymbol{\nu}_2^*(X)\boldsymbol{n} < \beta_4' s^2(X).$$

Представим вектор $\nu_2^*(X)$ так же, как вектор $\nu_1(X)$ в виде суммы двух векторов:

$$\nu_2^*(X) = n_2^*\delta_2^*(X) + t_2^*(X).$$

Тогда

$$0 \leqslant -nn_2^*\delta_2^*(X) - nt_2^*(X) < \beta_4' s^2(X).$$

Отсюда

$$\delta_2^*(X) < \beta_4 s^2(X)$$

(β_4 — некоторая постоянная).

Подставляя теперь в неравенство (1) $\nu_1(X) = n_1\delta_1(X) + t_1(X)$, $\nu_2^*(X) = n_2^*\delta_2^*(X) + t_2^*(X)$ и принимая во внимание, что $nn_1 = -n_2^*n \neq 0$, $\frac{t_1(X)}{\delta_1(X)}$, $\frac{t_2^*(X)}{\delta_2^*(X)} \to 0$, когда $s(X) \to 0$, а $\frac{\delta_1(X)}{s^2(X)}$ и $\frac{\delta_2^*(X)}{s^2(X)}$ ограничены, приходим к неравенству

$$\delta_1(X) - \delta_2^*(X) > cs^2(X), \tag{4}$$

где c — положительная постоянная.

Допустим теперь, что по крайней мере одна из двух точек — точка $\bar{X}$ поверхности ω_1, или точка, соответствующая $\bar{X}$ на ω_2, является нерегулярной. В этом случае на поверхности F существует последовательность точек Y_k, сходящаяся к точке $r(\bar{X})$, причём

$$\frac{h(Y_k)}{d^2(Y_k)} \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

где $h(Y_k)$ — расстояние точки Y_k от касательной плоскости поверхности F в точке $r(\bar{X})$, а $d(Y_k)$ — расстояние проекции точки Y_k на эту плоскость от точки $r(\bar{X})$.

Опишем из точки $\bar{X}$ на поверхности ω_1 геодезическую окружность $\bar{\gamma}$ малого радиуса ε_1. Из представления радиус-вектора $r(X)$ для точек X, близких к $\bar{X}$, следует, что кривая $\frac{1}{\varepsilon_1} r(\overline{\gamma})$ *) при $\varepsilon_1 \to 0$ сходится к эллипсу с центром в точке $r(\overline{X})$, лежащему в касательной плоскости к поверхности F в этой точке. Поэтому, если провести через точку Y_k прямую g_k, перпендикулярную к касательной плоскости поверхности F в точке $r(\overline{X})$, то при достаточно большом k эту прямую охватывает контур $r(\overline{\gamma})$. Если теперь уменьшать ε_1, то контур $r(\overline{\gamma})$ будет стягиваться к точке $r(\overline{X})$ и в некоторый момент пересекает прямую g_k. Отсюда следует, что для каждой точки Y_k с достаточно большим номером k существует точка X_k на ω_1, причём $X_k \to \overline{X}$, когда $k \to \infty$, и $(r(X_k) - r(\overline{X}))\, n \geqslant h(Y_k)$. Так как $\left|\frac{r(X_k) - r(\overline{X})}{d(Y_k)}\right| \to 1$ при $k \to \infty$, а $|r(X_k) - r(\overline{X})| > \overline{k} s(X_k)$, где $\overline{k} > 0$ — постоянная, то

$$\frac{(r(X_k) - r(\overline{X}))\, n}{s^2(X_k)} \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Но это невозможно, потому что $n(r(X_k) - r(\overline{X})) = n\nu_1 + n\nu_2^*$, а $n\nu_1$ и $n\nu_2^*$, как показано выше, имеют порядок не ниже s^2.

Таким образом, точка $\overline{X}$ на поверхности ω_1 и соответствующая ей по изометрии точка на поверхности ω_2 суть регулярные точки. Отсюда и из неравенства (4) очевидным образом следует, что для поверхностей F_1 и F_2 действительно существует расположение, существование которого утверждается леммой 2.

§ 4. Доказательство леммы 3 § 1

Допустим, что лемма неверна. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что максимум функции $z(X) = z_1(X) - z_2(X)$ не достигается на границе поверхности F_1, и, следовательно, для поверхностей F_1 и F_2 имеет место

*) $\frac{1}{\varepsilon_1} r(\overline{\gamma})$ — кривая, полученная преобразованием подобия из $r(\overline{\gamma})$ относительно центра подобия $r(\overline{X})$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{\varepsilon_1}$.

лемма 2 § 1 настоящей главы, согласно которой движением поверхности F_1 и F_2 можно расположить так, что будут выполняться условия:

1) в начале координат O совпадают две соответствующие по изометрии регулярные точки $\overline{X}$ и $\overline{X}'$ поверхностей F_1 и F_2;

2) плоскость xy является общей касательной плоскостью поверхностей F_1 и F_2, причём обе поверхности расположены с одной стороны этой плоскости, например в полупространстве $z > 0$;

3) для всех точек X поверхности F_1, достаточно близких к $\overline{X}$, имеет место неравенство

$$|z_1(X) - z_2(X)| > cs^2(X) \qquad (c > 0);$$

для определённости будем считать, что

$$z_1(X) - z_2(X) > cs^2(X).$$

Вращением около оси z и зеркальным отражением в плоскости, проходящей через ось z, совместим соответствующие по изометрии направления на поверхностях в точке O. При этом, очевидно, условия 1, 2, 3 не нарушаются.

Ограничиваясь рассмотрением ε-окрестностей ω_1 и ω_2 точки O поверхностей F_1 и F_2, подвергнем ω_1 и ω_2 аффинному преобразованию $A(\lambda)$, при котором точке с координатами x, y, z ставится в соответствие точка с координатами x', y', z' равенствами:

$$x' = \frac{x}{\lambda}, \qquad y' = \frac{y}{\lambda}, \qquad z' = \frac{z}{\lambda^2}.$$

Пусть γ — геодезическая на поверхности ω_1, проходящая через точку O, причём вектор-функция $r_1(X)$ по дуге этой геодезической имеет вторую производную в точке O. Выясним, во что переходит кривая $\gamma(\lambda)$, полученная из γ аффинным преобразованием $A(\lambda)$, при $\lambda \to 0$.

Для точек X поверхности ω_1, близких к точке O, согласно теореме 2 § 4 гл. I имеем:

$$r_1(X) = \tau_1(X)\, s(X) + e_z z_1(X) + t_1(X),$$

где e_z — единичный вектор, имеющий направление положительной оси z, а $t_1(X)$ — вектор, лежащий в плоскости xy, причём $\frac{t_1(X)}{z_1(X)} \to 0$, когда $X \to 0$.

Если, кроме того, точка X лежит на геодезической γ, то

$$r_1(X) = \tau_1(X)\,s(X) + a_1(X)\,s^2(X),$$

где $a_1(X)$ — вектор, который при $X \to 0$ сходится к $\frac{1}{2} r''_{1\gamma}(0)$.

Сопоставляя эти два выражения для $r_1(X)$ и замечая, что $z_1(X) > cs^2(X)$ $(c > 0)$, заключаем, что вектор $r''_{1\gamma}(0)$ отличен от нуля и имеет направление положительной полуоси z.

Преобразованием $A(\lambda)$ точка $r_1(X)$ геодезической γ переводится в точку

$$r_1(X, \lambda) = \frac{\tau_1(X)\,s(X)}{\lambda} + \frac{r''_{1\gamma}(0)\,s^2(X)}{\lambda^2} + \eta(X, \lambda),$$

где $\eta(X, \lambda)$ — вектор, стремящийся к нулю, когда

$$\frac{s(X)}{\lambda} < N < \infty, \quad \text{а} \quad s(X) \to 0.$$

Отсюда следует, что при $\lambda \to 0$ $\gamma(\lambda)$ переходит в параболу, уравнение которой есть

$$r = r'_{1\gamma}(0)\,\xi + \frac{1}{2} r''_{1\gamma}(0)\,\xi^2. \tag{1}$$

При $\lambda \to 0$ поверхность $\omega_1(\lambda)$, полученная аффинным преобразованием $A(\lambda)$ из поверхности ω_1, сходится к некоторой выпуклой поверхности $\omega_1(0)$. Так как счётное всюду плотное множество плоскостей, проходящих через ось z, пересекает поверхность $\omega_1(0)$ по параболам с осью z и вершиной O, то сечение этой поверхности любой плоскостью, проходящей через ось z, есть парабола с осью z и вершиной O, откуда следует, что вектор-функция $r_1(X)$ имеет вторую производную по дуге любой геодезической на поверхности ω_1, проходящей через точку O, в точке O.

Таким образом, любая геодезическая γ, проходящая через точку O, аффинным преобразованием $A(\lambda)$ при $\lambda \to 0$ переводится в параболу с уравнением (1).

Если для поверхности ω_2 провести аналогичное рассуждение, то приходим к следующему заключению.

Вектор-функция $\boldsymbol{r}_2(X)$ имеет вторую производную по дуге любой геодезической на поверхности ω_2, проходящей через точку O, в точке O.

Поверхность $\omega_2(\lambda)$, полученная аффинным преобразованием $A(\lambda)$ из поверхности ω_2, при $\lambda \to 0$ сходится к выпуклой поверхности $\omega_2(0)$, сечения которой плоскостями, проходящими через ось z, суть параболы с осью z и вершиной O, или прямые, лежащие в плоскости xy.

Для каждой точки X поверхности ω_1 имеем:

$$\boldsymbol{r}_1(X) = \boldsymbol{\tau}_1(X)\, s(X) + \boldsymbol{a}_1(X)\, s^2(X),$$

$$\boldsymbol{r}_2(X) = \boldsymbol{\tau}_2(X)\, s(X) + \boldsymbol{a}_2(X)\, s^2(X).$$

Отсюда, так как $\boldsymbol{\tau}_1(X) = \boldsymbol{\tau}_2(X)$, получаем:

$$z_1(X) - z_2(X) = (\boldsymbol{a}_1(X) - \boldsymbol{a}_2(X))\, \boldsymbol{e}_z s^2(X).$$

Если точка X неограниченно приближается к O вдоль некоторой геодесической γ, проходящей через точку O, то

$$a_1(X) \to \frac{1}{2} r''_{1\gamma}(0), \quad a_2(X) \to \frac{1}{2} r''_{2\gamma}(0),$$

$$z_1(X) - z_2(X) > cs^2(X),$$

где c — положительная постоянная, не зависящая от γ. Поэтому

$$\boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{r}''_{1\gamma}(0) - \boldsymbol{r}''_{2\gamma}(0)) > 2c > 0.$$

Отсюда, принимая во внимание вид уравнений парабол, по которым пересекают плоскости, проходящие через ось z, поверхности $\omega_1(0)$ и $\omega_2(0)$, заключаем, что поверхность $\omega_1(0)$ находится внутри $\omega_2(0)$ и имеет с ней только одну общую точку O, в которой обе поверхности касаются плоскости xy.

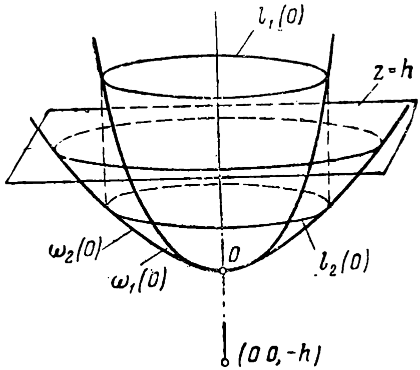
Изометрическое соответствие точек поверхностей ω_1 и ω_2 индуцирует некоторое соответствие точек поверхностей $\omega_1(\lambda)$ и $\omega_2(\lambda)$. Это соответствие переходит при $\lambda \to 0$ в простое проектирование поверхности $\omega_1(0)$ на $\omega_2(0)$ прямыми, параллельными оси z. Действительно, точки поверхностей $\omega_1(\lambda)$

и $\omega_2(\lambda)$, поставленные в соответствие, суть

$$r_1(X, \lambda) = \frac{\tau_1(X)s(X) + t_1(X)}{\lambda} + \frac{e_z z_1(X)}{\lambda^2},$$

$$r_2(X, \lambda) = \frac{\tau_2(X)s(X) + t_2(X)}{\lambda} + \frac{e_z z_2(X)}{\lambda^2}.$$

Если $r_1(X, \lambda)$ при $\lambda \to 0$ сходится к некоторой точке P поверхности $\omega_1(0)$, то это значит, что сходится $\frac{\tau_1(X)s(X)}{\lambda}$. Но $\tau_1(X) = \tau_2(X)$. Следовательно, проекции точек $r_1(X, \lambda)$ и $r_2(X, \lambda)$ сходятся к проекции точки P на плоскость xy.



Черт. 17.

Пусть $l_1(\lambda)$ — линия пересечения поверхности $\omega_1(\lambda)$ с плоскостью $z=1$, $l_1(0)$ — линия пересечения поверхности $\omega_1(0)$ с той же плоскостью. Пусть, далее, $l_2(\lambda)$ и $l_2(0)$ — соответствующие им кривые на $\omega_2(\lambda)$ и $\omega_2(0)$. Проведём плоскость $z=h$, расположенную между кривыми $l_1(0)$ и $l_2(0)$ (черт. 17).

Конус K_1, проектирующий поверхность $\omega_1(0)$ из точки $(0, 0, -1)$, касается поверхности $\omega_1(0)$ вдоль кривой $l_1(0)$, а конус K_2, проектирующий поверхность $\omega_2(0)$ из точки $(0, 0, -h)$, касается $\omega_2(0)$ по кривой пересечения плоскости $z=h$ с поверхностью $\omega_2(0)$. Если совместить параллельным переносом вершину конуса K_1 с вершиной конуса K_2, то K_1 будет находиться существенно внутри K_2. Отсюда следует, что сферическое изображение области на поверхности $\omega_1(0)$, ограниченной кривой $l_1(0)$, содержит существенно внутри себя сферическое изображение области на поверхности $\omega_2(0)$, ограниченной кривой $l_2(0)$. Очевидно, это будет иметь место также для областей $G_1(\lambda)$ и $G_2(\lambda)$ поверхностей $\omega_1(\lambda)$ и $\omega_2(\lambda)$, ограниченных кривыми $l_1(\lambda)$ и $l_2(\lambda)$ соответственно, если λ достаточно мало. Так как при аффинном преобразовании параллельные плоскости переходят в параллельные, то сферическое изображение области G_1 на ω_1, соответствующей $G_1(\lambda)$ на $\omega_1(\lambda)$, содержит существенно внутри себя сферическое изображение области G_2 на ω_2, соответствующей $G_2(\lambda)$ на $\omega_2(\lambda)$, и, следовательно, внешняя кривизна области G_1 на ω_1 больше внешней кривизны области G_2 на ω_2. Но это находится в противоречии с теоремой 1 § 3 гл. II, так как области G_1 и G_2 соответствуют по изометрии поверхностей F_1 и F_2 и поэтому должны иметь одинаковые внешние кривизны.

Лемма 3 доказана.

ГЛАВА IV

О КРИВИЗНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Получение внутренних оценок для производных радиус-вектора точки регулярной выпуклой поверхности

В пятой главе будет дано доказательство регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной. Идея этого доказательства в общих чертах состоит в следующем.

Согласно теореме 4 § 3 гл. II выпуклая поверхность с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной гладкая и существенно выпуклая. Пусть P — произвольная точка поверхности Ф. Так как Ф существенно выпуклая поверхность, то плоскостью, параллельной касательной плоскости в точке P, близкой к точке P, можно отрезать от поверхности Ф маленькую шапочку ω.

Отобразим шапочку ω топологически на единичный круг $K\,(x^2+y^2<1)$. При этом в круге будет определена регулярная метрика, которая в некоторых криволинейных координатах u, v задаётся квадратичной формой

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

— линейным элементом шапочки ω.

Пусть метрика поверхности Ф дифференцируема k раз и u, v — такие координаты на поверхности, относительно которых коэффициенты E, F, G дифференцируемы k раз. Построим последовательность аналитических функций E_n, F_n, G_n, равномерно сходящихся к E, F и G соответственно с их прозводными до k-го порядка включительно в круге K.

Определим в круге K аналитическую метрику с помощью квадратичной формы

$$ds_n^2 = E_n\,du^2 + 2F_n\,du\,dv + G_n\,dv^2.$$

Допустим, что окружность круга K относительно метрики ds_n^2 имеет всюду положительную геодезическую кривизну. Тогда, оказывается, существует аналитическая шапочка ω_n, реализующая метрику ds_n^2 в том смысле, что существует топологическое отображение круга K на эту шапочку, переводящее координатную сеть u, v круга K в координатную сеть u, v на шапочке ω_n, относительно которой линейный элемент шапочки ω_n будет ds_n^2. Обозначим через $\boldsymbol{r}_n(u, v)$ радиус-вектор точки шапочки ω_n, а через $\boldsymbol{r}(u, v)$ — радиус-вектор шапочки ω. Отображение шапочки ω на шапочку ω_n, при котором соответствующими считаются точки с одинаковыми координатами u и v, близко к изометрическому, если n достаточно велико. Действительно, длина произвольной кривой γ на шапочке ω, заданной уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, равна

$$\int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,dt,$$

а длина соответствующей кривой на шапочке ω_n равна

$$\int_a^b \sqrt{F_n u'^2 + 2F_n u'v' + G_n v'^2}\,dt.$$

Последовательность функций $\boldsymbol{r}_n$ равностепенно непрерывна, так как $|\boldsymbol{r}_n(u+\Delta u,\ v+\Delta v) - \boldsymbol{r}_n(u,\ v)|$ меньше расстояния между точками $(u+\Delta u,\ v+\Delta v)$, $(u,\ v)$ относительно метрики ds_n^2, а это расстояние, если Δu и Δv достаточно малы,

$$\approx \sqrt{E_n\,\Delta u^2 + 2F_n\,\Delta u\,\Delta v + G_n\,\Delta v^2} < c\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2},$$

где c — некоторая постоянная.

Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность вектор-функций $\boldsymbol{r}_n(u, v)$ равномерно ограничена.

Так как последовательность функций $r_n(u, v)$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена, то можно выделить из неё сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что уже сама последовательность $r_n(u, v)$ сходится к некоторой функции $\bar{r}(u, v)$.

Сходимости функций $r_n(u, v)$ к функции $\bar{r}(u, v)$ соответствует сходимость шапочек ω_n к некоторой шапочке $\bar{\omega}$ с радиус-вектором $\bar{r}(u, v)$. Очевидно, топологическое отображение шапочки ω на шапочку ω_n, при котором ставятся в соответствие точки с одинаковыми координатами, при $n \to \infty$ переходит в изометрическое отображение шапочки ω на шапочку $\bar{\omega}$.

Согласно теореме 1 § 1 гл. III шапочки ω и $\bar{\omega}$ равны. Поэтому доказательство регулярности шапочки ω сводится к доказательству регулярности шапочки $\bar{\omega}$, т. е. к доказательству регулярности вектор-функции $\bar{r}(u, v)$.

Для того чтобы предельная функция $\bar{r}(u, v)$ последовательности $r_n(u, v)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ была m раз дифференцируемой, достаточно, чтобы $(m+1)$-е производные функций $r_n(u, v)$ были равномерно ограничены. Оказывается, что для производных s-го порядка вектор-функции $r_n(u, v)$ могут быть получены оценки в круге K_ε $x^2+y^2 < 1-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ в зависимости только от максимума модулей функций E_n, F_n, G_n, их производных до некоторого порядка t, зависящего от s, минимума гауссовой кривизны, вычисленной с помощью коэффициентов E_n, F_n, G_n и максимума $\frac{1}{E_n}$, $\frac{1}{G_n}$, $\frac{1}{E_nG_n-F_n^2}$.

Если $t(s) \leqslant k$, то, ввиду сходимости E_n, F_n и G_n к E, F и G вместе с производными до k-го порядка, можно считать, что оценки для производных порядка s функций $r_n(u, v)$ в круге K_ε не зависят от n, откуда следует $(s-1)$-кратная дифференцируемость предельной функции $\bar{r}(u, v)$ и, следовательно, регулярность шапочки $\bar{\omega}$, равной ω. Так как точка P — вершина шапочки ω — взята произвольно, то вся поверхность F регулярна.

Пусть теперь ω — выпуклая шапочка, расположенная вместе со своей границей на некоторой регулярной выпуклой поверхности с положительной гауссовой кривизной. Пусть $\boldsymbol{r}(u, v)$ — радиус-вектор шапочки ω и

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

— её линейный элемент.

Получение внутренних оценок для первых производных функции $\boldsymbol{r}(u, v)$ не составляет труда, так $\boldsymbol{r}_u^2 = E$, а $\boldsymbol{r}_v^2 = G$. Гораздо труднее оценить вторые производные. В §§ 2, 3 и 4 настоящей главы будет получена внутренняя оценка дли нормальной кривизны шапочки ω. После этого нетрудно получить внутренние оценки для вторых производных функции $\boldsymbol{r}(u, v)$. В самом деле, проведём из произвольной точки X на ω геодезическую γ. Вторая производная $\boldsymbol{r}''_\gamma$ по дуге этой геодезической по абсолютной величине равна нормальной кривизне поверхности ω в направлении геодезической γ. С другой стороны,

$$\boldsymbol{r}''_\gamma = \boldsymbol{r}_{uu}u'^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}u'v' + \boldsymbol{r}_{vv}v'^2 + \boldsymbol{R},$$

где $\boldsymbol{R}$ — некоторое выражение, абсолютную величину которого легко оценить, так как оно содержит только первые производные функции $\boldsymbol{r}$ и производные u, v по дуге s геодезической γ. Беря геодезические γ направлений $v' = 0$, $u' = 0$, $u' = v'$, получаем последовательно оценки для $|\boldsymbol{r}_{uu}|$, $|\boldsymbol{r}_{vv}|$, $|\boldsymbol{r}_{uv}|$.

Оценки для производных третьего и последующих порядков функции $\boldsymbol{r}(u, v)$ получаются из других, негеометрических соображений.

Допустим, что шапочка ω однозначно проектируется на плоскость xy и её касательные плоскости образуют с плоскостью xy углы меньше $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$.

Как известно, компоненты $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных типа Монжа — Ампера с коэффициентами, зависящими только от коэффициентов квадратичной формы ds^2 — линейного элемента шапочки ω — и их производных до второго порядка включительно. Напомним способ Дарбу получения этого уравнения для компоненты L вектора $\boldsymbol{r}$ и попутно решим вопрос о принадлежности этого уравнения к эллиптическому типу.

Введём на поверхности шапочки ω полугеодезическую координатную сеть. Тогда линейный элемент поверхности, как известно, имеет вид

$$ds^2 = du^2 + c^2 dv^2.$$

Рассматривая x, y, z как функции переменных u, v, имеем тождество

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

Отсюда

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 - dr^2.$$

Слева в этом равенстве мы имеем линейный элемент плоскости. Поэтому гауссова кривизна, выраженная через коэффициенты квадратичной формы, стоящей справа, равна нулю. Это и даёт искомое уравнение для функции $z(u, v)$:

$$F = r(t + \alpha) - (s - \beta)^2 + \gamma = 0, \tag{1}$$

где

$$\alpha = cc_u p - \frac{c_v}{c} q, \quad \beta = \frac{c_u}{c} q,$$

$$\gamma = \frac{c_{uu}}{c}(c^2 - c^2p^2 - q^2),$$

а p, q, r, s, t — общепринятые обозначения для первых и вторых производных функции $z(u, v)$.

Дискриминант уравнения (1)

$$\Delta = F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2 = -\frac{c_{uu}}{c}(c^2 - c^2p^2 - q^2)$$

представляет собой произведение двух сомножителей, из коих первый, $-\frac{c_{uu}}{c}$, есть гауссова кривизна поверхности, а второй является дискриминантом квадратичной формы

$$ds^2 - dz^2 = dx^2 + dy^2.$$

Но отношение дискриминантов форм $dx^2 + dy^2$ и ds^2 равно $\cos^2\vartheta$, где ϑ — угол, образуемый касательной плоскостью шапочки ω с плоскостью xy. И так как $\cos^2\vartheta$ нигде не обращается в нуль, то

$$\Delta > 0$$

для всех точек шапочки, и таким образом, уравнение (1) является эллиптическим. Существенно заметить, что для дискриминанта Δ уравнения (1) может быть указана оценка снизу в зависимости только от минимума гауссовой кривизны шапочки ω и максимума углов, образуемых касательными плоскостями к ней с плоскостью xy.

В дополнении II доказана теорема для общих уравнений в частных производных эллиптического типа, дающая возможность получать оценки для третьих и последующих производных решения этого уравнения, если известны оценки для производных второго порядка. Эта теорема в применении к уравнению Дарбу позволяет получить оценки последовательных производных вектор-функции $r(u, v)$, начиная с третьих.

§ 2. Внутренние оценки для верхней кривизны регулярной выпуклой шапочки вдоль её границы

Теорема 1. *Пусть ω — регулярная выпуклая шапочка, регулярно продолжаемая за её границу, причём геодезическая кривизна кривой, ограничивающей шапочку, существенно положительна, а гауссова кривизна шапочки всюду больше $\varkappa_0 > 0$.*

Тогда для кривизны нормальных сечений шапочки вдоль её границы, а также для тангенса угла наклона её касательных плоскостей к плоскости её основания может быть дана оценка в зависимости только от величин, определяемых внутренней геометрией шапочки.

Более подробно, *пусть ω — выпуклая шапочка, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *шапочка ω пять раз дифференцируема;*

2) *гауссова кривизна шапочки ω всюду больше $K_0 > 0$;*

3) *существует пять раз дифференцируемая выпуклая поверхность, на которой шапочка ω лежит вместе со своей границей γ, т. е шапочка ω может быть регулярно (в смысле пятикратной дифференцируемости) продолжена за её границу;*

4) *геодезическая кривизна кривой, ограничивающей шапочку, всюду больше $\varkappa_0 > 0$.*

Тогда для верхней кривизны в точках границы шапочки можно указать оценку сверху, зависящую только от сле-

дующих величин: K_0, $\varkappa_0$; *верхней грани модулей коэффициентов квадратичной формы* ds^2 — *линейного элемента поверхности* ω — *их производных не выше третьего порядка; нижней грани дискриминанта формы* ds^2 (*т. е.* $EG - F^2$) *и коэффициентов* E *и* G *этой формы; верхней грани модулей производных координат* u, v *на поверхности по дуге* s *кривой* γ *до четвёртого порядка.*

В зависимости от тех же величин может быть указана оценка, меньшая $\frac{\pi}{2}$, *для наибольшего угла, образуемого касательными плоскостями шапочки* ω *с плоскостью её основания.*

Доказательство. Введём в пространстве прямоугольные декартовы координаты x, y, z, при этом примем плоскость основания шапочки ω за плоскость xy, а положительную полуось z направим так, чтобы шапочка ω находилась в полупространстве $z > 0$.

Для того чтобы получить оценки для верхней кривизны шапочки ω, достаточно оценить должным образом первые и вторые производные функции $z(u, v)$. Действительно, проведём через точку X шапочки ω геодезическую γ_1.

Нормальная кривизна поверхности в направлении γ_1 совпадает с кривизной геодезической γ_1. Поэтому достаточно найти последнюю.

Проведём через геодезическую γ_1 цилиндрическую поверхность Φ с образующими, параллельными оси z. Легко найти геодезическую кривизну кривой γ_1 на этой поверхности. В самом деле, обозначая через α угол, образуемый касательной к γ_1 с плоскостью xy, будем иметь

$$\frac{dz}{ds} = \sin\alpha, \qquad \frac{d^2z}{ds^2} = \varkappa\cos\alpha,$$

где $\varkappa$ — геодезическая кривизна кривой γ_1, а дифференцирование выполнено по дуге её s. Между геодезической кривизной и обычной кривизной k_{γ_1} кривой γ_1 существует известное соотношение

$$\varkappa = k_{\gamma_1}\sin\vartheta,$$

где ϑ — угол, образуемый главной нормалью γ_1 (в данном случае это — нормаль поверхности ω) с нормалью поверхности Φ.

Отсюда находим выражение для нормальной кривизны в форме

$$k_{\gamma_1} = \frac{1}{\cos\alpha \sin\vartheta} \cdot \frac{d^2 z}{ds^2}.$$

Так как $\cos\alpha\sin\vartheta = \cos\varphi$, где φ — угол, образуемый касательной плоскостью шапочки с плоскостью её основания, то

$$k_{\gamma_1} = \frac{d^2 z}{ds^2} \cdot \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Отсюда следует, что для получения оценки нормальной кривизны k_{γ_1} достаточно получить оценку для первых и вторых производных функции z и оценку для $\frac{1}{\cos\varphi}$, что в конечном счёте сводится к получению надлежащих оценок для первых производных z_u и z_v.

Введём на поверхности шапочки полугеодезическую координатную сеть u, v следующим образом. За линию $u = 0$ примем границу γ шапочки ω, за координатные линии семейства u примем геодезические, перпендикулярные к γ, за семейство линий v — их ортогональные траектории. В качестве параметров u и v примем дугу вдоль линии γ и дугу вдоль линий семейства u. При таком выборе координат u, v линейный элемент шапочки ω есть

$$ds^2 = du^2 + c^2 dv^2,$$

а уравнение Дарбу для функции $z(u, v)$

$$F = r(t + \alpha) - (s - \beta)^2 + \gamma = 0, \tag{1}$$

где

$$\alpha = cc_u p - \frac{c_v}{c} q, \qquad \beta = \frac{c_u}{c} q,$$

$$\gamma = \frac{c_{uu}}{c}(c^2 - c^2 p^2 - q^2).$$

Оценим первые и вторые производные функции z.

Во-первых, заметим, что существует число u_0, зависящее только от метрики шапочки и геодезической кривизны граничной кривой γ, такое, что для всех точек шапочки ω, для которых $u \leqslant u_0$

$$|p| < 1 \quad \text{и} \quad |q| < 2.$$

Действительно, $|p| = \sin\vartheta$, где ϑ — угол, образуемый касательной к геодезической семейства u с плоскостью xy. Этот угол всегда меньше $\frac{\pi}{2}$, так как все касательные плоскости шапочки ω образуют с плоскостью xy углы, меньшие $\frac{\pi}{2}$. Далее, $|q| = \sin\varphi \frac{1}{c}$, где φ — угол, образуемый касательной к линии семейства v, а c соответствует линейному элементу

$$ds^2 = du^2 + c^2 dv^2.$$

Так как c на линии γ равно единице, то можно указать такое число u_0, что если $u \leqslant u_0$, то $c > \frac{1}{2}$. При этом, очевидно, $|q| < 2$.

Введём на плоскости прямоугольные декартовы координаты u, v и обозначим через G бесконечную полосу, ограниченную осью $u = 0$ и прямой $u = u_0$. Определим теперь в полосе G функцию $\zeta(u, v)$ условиями:

1) функция $\zeta(u, v)$ периодическая по v с периодом l, где l — длина кривой γ;

2) для $0 \leqslant u \leqslant u_0$ и $0 \leqslant v < l$ положим $\zeta(u, v) = q$.

Построенная функция ζ равна 0 на оси u, а на прямой $u = u_0$ имеем $|\zeta| < 2$.

Рассмотрим поверхность Φ, заданную уравнением $\zeta = \zeta(u, v)$ в полосе $0 \leqslant u \leqslant u_0$. Проведём через прямую $u = 0$ плоскость σ, образующую с плоскостью u, v наименьший угол так, чтобы поверхность Φ была расположена под этой плоскостью. Относительно этой плоскости σ могут быть два предположения: либо она упирается в край поверхности Φ, который проектируется на прямую $u = u_0$, либо она касается поверхности Φ в некоторой точке. В первом случае при $u = 0$ $\zeta_u < \frac{2}{u_0}$ и, следовательно, $s < \frac{2}{u_0}$ вдоль границы шапочки ω.

Рассмотрим второй случай. Дифференцируя уравнение (1) по v, получим:

$$q_{uu}(t + \alpha) - 2q_{uv}(s - \beta) + q_{vv}r + r\alpha_v + 2(s - \beta)\beta_v + \gamma_v = 0. \quad (2)$$

В точке касания плоскости σ с поверхностью Φ имеем $q_v = t = 0$. Поэтому в этой точке $\alpha > 0$, так как дискриминант уравнения (1)

$$\Delta = (t + \alpha) r - (s - \beta)^2 > 0.$$

Это даёт право выразить r в точке касания из уравнения (1):

$$r = \frac{(s-\beta)^2 - \gamma}{\alpha}.$$

Обращаясь теперь к уравнению (2), мы видим, что в точке касания плоскости σ с поверхностью Φ первые три слагаемых дают неположительное число. Действительно, форма

$$\xi^2(t+\alpha) + 2\xi\eta(s-\beta) + \eta^2 r$$

положительно определённая, так как $r > 0$ и $\Delta > 0$. Далее, форма

$$\xi^2 q_{uu} + 2\xi\eta q_{uv} - \eta^2 q_{vv}$$

не принимает положительных значений, так как поверхность Φ лежит под плоскостью σ. Отсюда следует, что

$$q_{uu}(t+\alpha) - 2q_{uv}(s-\beta) + q_{vv} r \leqslant 0.$$

Сумму остальных слагаемых уравнения (2) можно записать в виде

$$\frac{s^3 c c_u + O_2(s)}{\alpha},$$

где $O_2(s)$ — многочлен второй степени относительно s с коэффициентами, модули которых без труда оцениваются сверху через верхнюю грань модуля функции $c(u, v)$ и её производных до третьего порядка.

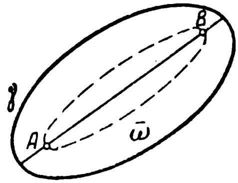
Так как $\alpha > 0$, $c > \frac{1}{2}$, а $c_u < -\varkappa_0$ *), то при s, большем некоторого числа s_0, определяемого только внутренней метрикой поверхности и геодезической кривизной кривой γ, сумма остальных членов уравнения (2) отрицательна. Число s_0 и есть тот предел, которого производная s в точке касания не может превзойти. Но значения производной $q_u = s$ вдоль $u = 0$ во всяком случае не больше, чем её значение в точке касания. Поэтому число s_0 служит верхним пределом произ-

*) c_u при $v = \text{const.}$ есть монотонно убывающая функция u, так как величина $-\frac{c_{uu}}{c}$ есть гауссова кривизна поверхности и следовательно, больше нуля. При $u = 0$ $c_u = -\varkappa$, где $\varkappa$ — геодезическая кривизна кривой γ.

водной s вдоль кривой γ. Очевидно, оценкой для s снизу является $-s_0$.

Оценку производной r на границе шапочки легко получить, если известен нижний предел $|p|$ вдоль этой границы. Но его нетрудно получить из геометрических соображений.

Кривая γ в плоскости xy ограничивает некоторую область $\bar{\omega}$. Так как геодезическая кривизна кривой γ на поверхности шапочки везде $\geqslant \varkappa_0$, то её обычная кривизна тоже $\geqslant \varkappa_0$ *).



Черт. 18.

Покажем, что в область $\bar{\omega}$ можно поместить круг $\tilde{\omega}$, радиус которого зависит только от $\varkappa_0$ и длины кривой γ. Для этого проведём диаметр области $\bar{\omega}$. Возьмём на нём две точки A и B, близкие к его концам (черт. 18). Построим теперь луночку из дуг окружностей радиуса $\frac{1}{\varkappa_0}$ с концами в точках A и B. Эта луночка расположена целиком внутри $\bar{\omega}$. Действительно, если радиус дуг окружностей достаточно велик, луночка, очевидно, находится внутри $\bar{\omega}$. Будем непрерывно уменьшать радиус дуг окружностей. Луночка при этом увеличивается, но не выходит за пределы $\bar{\omega}$, пока радиус дуг окружности остаётся больше $\frac{1}{\varkappa_0}$, так как дуга окружности радиуса больше $\frac{1}{\varkappa_0}$ не может коснуться кривой γ, кривизна которой не меньше $\varkappa_0$. Очевидно, внутри луночки можно построить круг $\tilde{\omega}$ радиуса не меньше ρ_0, причём ρ_0 зависит только от $\varkappa_0$ и диаметра области $\bar{\omega}$. И так как диаметр области $\bar{\omega}$ не меньше $\frac{l}{\pi}$, где l — длина кривой γ, то можно считать, что ρ_0 зависит только от $\varkappa_0$ и длины l кривой γ.

---

*) Обычная кривизна кривой связана с её геодезической кривизной равенством $k \cos \vartheta = k_g$, где ϑ — угол между соприкасающейся плоскостью кривой (в данном случае плоскостью основания шапочки) и касательной плоскостью к поверхности.

Проведём теперь от центра круга $\tilde{\omega}$ полупрямую g, перпендикулярную к плоскости основания шапочки ω, в сторону, противоположную той, куда обращена выпуклость шапочки. Построим сферу Ω достаточно далеко от шапочки с центром на полупрямой g и кривизной меньшей, чем наименьшая кривизна шапочки ω. Удалим из области $\bar{\omega}$ круг $\tilde{\omega}$. Оставшаяся часть области $\bar{\omega}$ и шапочка ω образуют некоторую поверхность Φ, край которой является окружностью круга $\tilde{\omega}$. Будем теперь смещать сферу Ω вдоль полупрямой g в направлении поверхности Φ. В некоторый момент сфера Ω либо упрётся в край поверхности Φ, т. е. окружность круга $\tilde{\omega}$, либо в шапочку ω. Вторая возможность исключается, так как кривизна сферы Ω меньше наименьшей кривизны шапочки.

Пусть h — расстояние, на которое выступает эта сфера в положении, когда она упирается в окружность круга $\tilde{\omega}$. Построим конус, основанием которого служит основание шапочки ω, а вершиной — точка, лежащая внутри шапочки, удалённая от плоскости основания шапочки на h, проектирующаяся в центр круга $\tilde{\omega}$.

Этот конус лежит внутри шапочки. Поэтому его касательные плоскости вдоль γ образуют с плоскостью основания углы, бóльшие, чем углы, образуемые касательными плоскостями шапочки. Это даёт возможность взять в качестве нижней грани для $|p|$ число $\delta = \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}$, где l — длина кривой γ.

Переходим к оценке производной r. Вдоль кривой γ имеем $t = 0$, $q = 0$, $\delta < |p| < 1$. Из уравнения (1) получаем вдоль кривой γ

$$r = \frac{(s-\beta)^2 - \gamma}{c c_u v}.$$

Так как $c_u < -\varkappa_0$, $|p| > \delta$ и для $|s|$ известна внутренняя оценка, то оценка может быть получена и для $|r|$.

Оценив вторые производные вдоль γ, легко получить оценку для $|p|$. В самом деле, в точке P кривой γ, где достигается максимум модуля p, имеем $s = 0$. Далее, в каждой точке кривой γ, а следовательно и в P, имеем $q=t=0$, $p<0$. Подставляя эти значения в уравнение (1), получим:

$$rcc_u p - cc_{uu}p^2 + cc_u = 0.$$

Отсюда получаем оценку для $|p|$. Относительно этой оценки важно заметить, что она меньше единицы, так как при $p = -1$ равенство, очевидно, не удовлетворяется, а $|p|$ по смыслу не больше единицы, как синус угла, образуемого касательной плоскостью в точке границы шапочки с плоскостью основания её.

В предыдущем параграфе было показано, что величина $\frac{1}{\cos^2\varphi}$, где φ — угол, образуемый касательной плоскостью шапочки с плоскостью xy, равна отношению дискриминантов форм ds^2 и $ds^2 - dz^2$. На кривой γ это отношение равно $\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$. А так как для $|p|$ получена оценка, меньшая единицы, то тем самым для φ получена оценка, меньшая $\frac{\pi}{2}$.

Если теперь оценить производные функции $c(u, v)$ в зависимости от коэффициентов E, F и G линейного элемента поверхности ω

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

и их производных, что, очевидно, возможно, то верхняя кривизна вдоль края шапочки, и углы, образуемые её касательными плоскостями с плоскостью её основания, будут оценены в зависимости только от тех величин, которые указаны в формулировке теоремы.

§ 3. Внутренние оценки для верхней кривизны регулярной выпуклой шапочки с регулярным краем

Теорема 1. *Если максимум верхней кривизны регулярной выпуклой поверхности достигается во внутренней точке поверхности, то для величины этого максимума можно получить оценку, зависящую только от минимума гауссовой кривизны, максимума модулей коэффициентов квадратичной формы ds^2 — линейного элемента поверхности,* *их производных до четвёртого порядка и минимума дискриминанта формы* ds^2.

Доказательство. Относительно точки X_0, в которой достигается максимум верхней кривизны, могут быть два предположения:

1) точка X_0 — шаровая, т. е. кривизна нормальных сечений по всем направлениям в этой точке одинакова и равна $\sqrt{K(X_0)}$, где $K(X_0)$ — гауссова кривизна в точке X_0;

2) точка X_0 не является шаровой.

В первом случае, очевидно, в качестве оценки максимума верхней кривизны можно взять число $\sqrt{K_0}$, где K_0 — максимум гауссовой кривизны поверхности.

Во втором случае, так как точка X_0 не шаровая, в её достаточно малой окрестности можно ввести координатную сеть u, v, состоящую из линий кривизны. В качестве параметров u и v примем дуги вдоль координатных линий, проходящих через точку X_0, и назовём $v=0$ то направление, по которому достигается максимум нормальной кривизны.

Согласно выбору параметров u и v вдоль линии $v=0$ имеем $ds^2=du^2$, а вдоль линии $u=0$ $ds^2=dv^2$. Поэтому для коэффициентов квадратичной формы

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

в точке X_0

$$E=G=1, \qquad F=0, \qquad E_u=G_v=0.$$

Выражения для средней и гауссовой кривизны поверхности имеют вид:

$$H=\frac{EN+GL}{2EG},$$

$$K=\frac{LN}{EG}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right\},$$

где L и N — первый и третий коэффициенты второй квадратичной формы поверхности *).

*) Приведённые здесь формулы для средней и гауссовой кривизны поверхности, а также формулы Кодацци читатель может найти в книге: Бляшке, Дифференциальная геометрия, ОНТИ, 1935.

Простой вид принимают также формулы Кодацци

$$L_v = \frac{1}{2} E_v \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right),$$

$$N_u = \frac{1}{2} G_u \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right).$$

Пусть $\varkappa$ и $\bar{\varkappa}$ — наибольшая и, соответственно, наименьшая нормальные кривизны поверхности в произвольной точке, близкой к X_0. Тогда из формул для средней и гауссовой кривизны, приведённых выше, легко следует:

$$\varkappa = \frac{L}{E}, \qquad \bar{\varkappa} = \frac{K}{\varkappa} = \frac{N}{G}.$$

После этого из формул Кодацци получим

$$\varkappa_v = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(-\varkappa + \bar{\varkappa}), \qquad \bar{\varkappa}_u = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}(\varkappa - \bar{\varkappa}).$$

Разрешая эти равенства относительно E_v и G_u, находим:

$$E_v = \frac{2E\varkappa_v}{-\varkappa + \frac{K}{\varkappa}}, \qquad G_u = \frac{2G\left(\frac{K}{\varkappa}\right)_u}{\varkappa - \frac{K}{\varkappa}}. \tag{1}$$

Найдём теперь выражение кривизны K в точке X_0. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_{(X_0)} = \frac{1}{2} E_{vv} - \frac{1}{4} E_v^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_{(X_0)} = \frac{1}{2} G_{uu} - \frac{1}{4} G_u^2.$$

Из равенств (1)

$$E_{vv} = E_v^2 + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2\varkappa_v}{-\varkappa + \frac{K}{\varkappa}}\right),$$

$$G_{uu} = G_u^2 + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{2\left(\frac{K}{\varkappa}\right)_u}{\varkappa - \frac{K}{\varkappa}}\right). \tag{2}$$

Так как $\varkappa$ достигает максимума в точке X_0, то в этой точке $\varkappa_u = \varkappa_v = 0$, и равенства (2) дают

$$E_{vv} = E_v^2 + \frac{2\varkappa_{vv}}{-\varkappa + \frac{K}{\varkappa}};$$

$$G_{uu} = G_u^2 + \frac{2K\frac{\varkappa_{uu}}{\varkappa^2}}{-\varkappa + \frac{K}{\varkappa}} + 2\frac{\frac{K_{uu}}{\varkappa}}{\varkappa - \frac{K}{\varkappa}}.$$

Подставляя найденные значения E_{vv} и G_{uu} в формулу для гауссовой кривизны K в точке X_0, получим:

$$K = -\left(\frac{1}{4}E_v^2 + \frac{1}{4}G_u^2 + \frac{2\varkappa_{vv}}{-\varkappa + \frac{K}{\varkappa}} + \frac{2K\varkappa_{uu}}{\varkappa^2\left(-\varkappa + \frac{K}{\varkappa}\right)}\right) - \frac{2K_{uu}}{\varkappa^2 - K}.$$

Так как в точке X_0 достигается максимум $\varkappa$, и точка X_0 не шаровая, то в этой точке $\varkappa > \frac{K}{\varkappa}$, $\varkappa_{uu} \leqslant 0$; $\varkappa_{vv} \leqslant 0$. Поэтому выражение в скобках неотрицательно, и, следовательно,

$$K \leqslant -\frac{2K_{uu}}{\varkappa^2 - K}. \tag{3}$$

Линия $v = 0$ в точке X_0 имеет нулевую геодезическую кривизну. Действительно, для геодезической кривизны известно следующее выражение:

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{w}\frac{\Gamma}{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где

$$w = \sqrt{EG - F^2},$$

$$\Gamma = w^2(u'v'' - v'u'') +$$
$$+ (Eu' + Fv')\left[\left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2\right] -$$
$$- (Fu' + Gv')\left[\frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + \left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right)v'^2\right].$$

Из этого выражения для геодезической кривизны кривой очевидным образом следует, что линия $v=0$ в точке X_0 имеет нулевую геодезическую кривизну.

Если обозначить через λ максимум второй производной гауссовой кривизны по дуге геодезической на всей поверхности по всем геодезическим, то из неравенства (3) получим в точке X_0:

$$K \leqslant \frac{2\lambda}{\varkappa^2 - K}.$$

Отсюда

$$\varkappa \leqslant \sqrt{K + \frac{2\lambda}{K}}.$$

Обозначая K_0 и $\overline{K}_0$ максимум и соответственно минимум гауссовой кривизны поверхности, получаем для верхней кривизны поверхности следующую оценку:

$$\varkappa \leqslant \sqrt{K_0 + \frac{2\lambda}{\overline{K}_0}}.$$

Теорема доказана.

Если поверхность замкнутая, то максимум её верхней кривизны, очевидно, достигается в некоторой внутренней точке, а поэтому не превосходит

$$\sqrt{K_0 + \frac{2\lambda}{\overline{K}_0}},$$

где K_0, $\overline{K}_0$ и λ имеют прежние значения.

Как следствие доказанной теоремы и теоремы 1 предыдущего параграфа получается

Теорема 2. *Пусть ω — регулярная выпуклая шапочка, регулярно продолжаемая за её границу, причём геодезическая кривизна кривой, ограничивающей шапочку, существенно положительна, а гауссова кривизна шапочки всюду больше $K_0 > 0$.*

Тогда для кривизны нормальных сечений шапочки, а также для тангенса угла наклона её касательных плоскостей к плоскости её основания может быть дана оценка в зависимости только от величин, определяемых внутренней геометрией шапочки.

Более подробно, *пусть* ω — *выпуклая шапочка, удовлетворяющая условиям*:

1) *шапочка* ω *пять раз дифференцируема*;

2) *гауссова кривизна шапочки* ω *всюду больше* $K_0 > 0$;

3) *существует пять раз дифференцируемая выпуклая поверхность, на которой шапочка* ω *лежит вместе со своей границей, т. е. шапочка* ω *может быть регулярно (в смысле пятикратной дифференцируемости) продолжена за её границу*;

4) *геодезическая кривизна кривой* γ, *ограничивающей шапочку* ω, *всюду больше* $\varkappa_0 > 0$.

Тогда для верхней кривизны шапочки ω *можно указать оценку сверху, зависящую только от следующих величин*: K_0, $\varkappa_0$; *верхней грани модулей коэффициентов квадратичной формы* ds^2 — *линейного элемента поверхности* ω, *их производных не выше четвёртого порядка; нижней грани дискриминанта этой формы* $EG - F^2$, *коэффициентов* E, G; *верхней грани модулей производных координат* u, v *по дуге кривой* γ, *ограничивающей шапочку, до четвёртого порядка.*

В зависимости от тех же величин можно получить оценку, меньшую $\frac{\pi}{2}$, *для углов, образуемых касательными плоскостями шапочки с плоскостью её основания.*

§ 4. Оценки для верхней кривизны регулярной выпуклой шапочки без предположения о регулярности её границы

В предыдущем параграфе была получена оценка для внешней кривизны регулярной выпуклой шапочки с регулярной границей, т. е. для такой шапочки, которая отрезается плоскостью от некоторой регулярной выпуклой поверхности. Если не предполагать регулярность края шапочки, то внутренней оценки для верхней кривизны на всей шапочке получить нельзя, так как вблизи края шапочки верхняя кривизна может быть сколь угодно большой. Тем не менее имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* ω — *регулярная выпуклая шапочка, гауссова кривизна которой всюду больше* $K_0 > 0$, *а углы,* *образуемые её касательными плоскостями с плоскостью её основания, всюду меньше* $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$.

Тогда для кривизны нормальных сечений шапочки в точке P могут быть указаны оценки в зависимости только от величин, определяемых внутренней геометрией шапочки, наибольшего угла, образуемого касательными плоскостями шапочки с плоскостью её основания и расстояния точки P от плоскости основания шапочки.

Более подробно: *пусть ω пять раз дифференцируемая выпуклая шапочка с гауссовой кривизной, большей* $K_0 > 0$, N — *любое множество на шапочке* ω, *расстояние которого от основания шапочки* $h_0 > 0$.

Тогда для верхней кривизны шапочки ω в точках множества N может быть указана оценка в зависимости только от следующих величин: высоты шапочки; наибольшего угла, образуемого касательными плоскостями шапочки с плоскостью её основания; минимума гауссовой кривизны K_0; верхней грани модулей коэффициентов квадратичной формы ds^2; их производных до четвёртого порядка; минимума дискриминанта этой формы $EG - F^2$ и коэффициентов E и G.

Доказательство. Расположим шапочку ω так, чтобы её основание находилось в плоскости xy, а сама шапочка в полупространстве $z < 0$. Пусть X — произвольная точка шапочки. Проведём из точки X произвольную геодезическую γ и обозначим $\varkappa_\gamma(X)$ нормальную кривизну поверхности в точке X в направлении γ.

Введём в рассмотрение функцию

$$\overline{w}_\gamma(X) = -z\varkappa_\gamma(X).$$

Эта функция непрерывна по X и γ, положительна во всех внутренних точках шапочки и обращается в нуль на её границе. Поэтому она достигает своего максимума в некоторой внутренней точке X_0 шапочки ω для некоторой геодезической γ_0, проходящей через эту точку.

Введём в окрестности точки X_0 на поверхности шапочки ω полугеодезические координаты u, v, приняв геодезическую γ_0 за линию $v = 0$, перпендикулярную к ней геодезическую $\overline{\gamma}_0$ — за линию $u = 0$. За семейство линий u примем геодезические, перпендикулярные к $\bar{\gamma}_0$, а их ортогональные траектории — за семейство линий v. Примем дуги геодезических γ_0 и $\bar{\gamma}_0$, отсчитываемые от точки X_0, в качестве параметров u, v.

Линейный элемент поверхности при таком выборе координат имеет вид

$$ds^2 = du^2 + c^2 dv^2.$$

Относительно функции $c(u, v)$ важно заметить следующее. Вдоль линии $u = 0$, в частности в точке X_0,

$$c = 1, \qquad c_u = c_v = c_{uv} = 0, \qquad c_{uu} = -K,$$

где K — гауссова кривизна поверхности.

Как показано в § 1 настоящей главы, функция z удовлетворяет уравнению

$$r(t + \alpha) - (s - \beta)^2 + \gamma = 0, \tag{1}$$

где

$$\alpha = cc_u p - \frac{c_v}{c} q, \qquad \beta = \frac{c_v}{c} q,$$

$$\gamma = -cc_{uu} p^2 - \frac{c_{uu}}{c} q^2 + cc_{uu}.$$

С помощью функции $\bar{w}_\gamma(X)$ введём функцию $\bar{w}(X)$ равенством

$$\bar{w}(X) = \bar{w}_{\gamma(X)}(X),$$

где $\gamma(X)$ — геодезическая семейства u, проходящая через точку X. Функция $\bar{w}(X)$, так же как и функция $\bar{w}_\gamma(X)$, достигает максимума в точке X_0, и эти максимумы совпадают.

Выразим $\bar{w}(X)$ через производные функции z. Имеем (см. § 1 настоящей главы):

$$\varkappa_\gamma = \frac{z''_\gamma(X)}{\cos\varphi},$$

где $\varphi(X)$ — угол, образуемый касательной плоскостью шапочки с плоскостью её основания. Далее, как показано в § 1 настоящей главы,

$$1 - p^2 - \frac{q^2}{c^2} = \cos\varphi.$$

Поэтому

$$\overline{w}(X) = \frac{-zr}{\sqrt{1 - p^2 - \frac{q^2}{c^2}}}.$$

Введём, наконец, в окрестности точки X_0 функцию w равенством:

$$w(X) = \frac{-zr}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}}.$$

Так как вдоль кривой $u = 0$ $c = 1$, $c_u = 0$, а $c_{uu} < 0$, то $c \leqslant 1$ в окрестности точки X_0 и $c = 1$ в самой точке X_0.

Поэтому $w(X) \leqslant \overline{w}(X)$ в окрестности точки X_0, а в самой точке X_0 имеем $w(X) = \overline{w}(X)$. Отсюда следует, что в точке X_0 функция $w(X)$ достигает максимума. Оценив величину этого максимума, мы тем самым оценим величину максимума $w_\gamma(X)$, откуда и получим интересующую нас оценку для верхней кривизны поверхности.

В точке X_0 выражения α, β, γ, входящие в уравнение (1), имеют следующие значения:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -K(1 - p^2 - q^2).$$

Поэтому уравнение (1) в точке X_0 имеет вид

$$rt - s^2 = K(1 - p^2 - q^2). \qquad (*)$$

Далее, нормальные кривизны поверхности по направлениям u и v в точке X_0 соответственно равны:

$$\varkappa_{(u)} = \frac{r}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}}, \qquad \varkappa_{(v)} = \frac{t}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}}.$$

Но направление u в точке X_0 является направлением, в котором нормальная кривизна максимальна. Поэтому

$$\varkappa_{(u)} \varkappa_{(v)} = K.$$

Подставляя сюда выражения для $\varkappa_{(u)}$ и $\varkappa_{(v)}$, находим в точке X_0:

$$rt = K(1 - p^2 - q^2). \qquad (2)$$

Сравнивая равенство (2) с равенством (*), заключаем, что $s = 0$ в точке X_0.

Дифференцируя уравнение (1) по u и v, в точке X_0 находим:

$$\begin{aligned} r_u t + r(t_u + \alpha_u) + \gamma_u = 0, \\ r_v t + r(t_v + \alpha_v) + \gamma_v = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Дифференцируя, наконец, уравнение (1) по u дважды, получаем в точке X_0:

$$r_{uu}t + r_{vv}r + 2r_u(t_u + \alpha_u) + r\alpha_{uu} - 2(s_u - \beta_u)^2 + \gamma_{uu} = 0. \tag{4}$$

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что функция $w(X)$ в точке X_0 достигает максимума, и, следовательно, в этой точке

$$w_u = w_v = 0, \qquad w_{uu} \leqslant 0, \qquad w_{vv} \leqslant 0.$$

Полагая для краткости $1 - p^2 - q^2 = \Delta$, имеем:

$$w = -zr\Delta^{-\frac{1}{2}},$$

откуда

$$r = -w\Delta^{\frac{1}{2}} z^{-1}. \tag{**}$$

Дифференцируя это равенство по u и v, в точке X_0 находим:

$$\begin{aligned} r_u &= -pr(r\Delta^{-1} + z^{-1}), \\ r_v &= -qr(t\Delta^{-1} + z^{-1}). \end{aligned}$$

Дифференцируя равенство (**) дважды по u и дважды по v, находим для r_{uu} и r_{vv} следующие выражения в точке X_0:

$$r_{uu} = -w_{uu}\Delta^{\frac{1}{2}} z^{-1} - \Delta^{-2}p^2r^3 - \Delta^{-1}r^3 - \Delta^{-1}r(pr_u + qr_v) + \\ + 2\Delta^{-1}p^2r^3z^{-1} - r^2z^{-1} + 2z^{-2}p^2r;$$

$$r_{vv} = -w_{vv}\Delta^{\frac{1}{2}} z^{-1} - \Delta^2q^2rt^2 - \Delta^{-1}rt^2 - \Delta^{-1}r(pt_u + qt_v) + \\ + 2\Delta^{-1}q^2rtz^{-1} - rtz^{-1} + 2q^2rz^{-2}.$$

Умножая первое равенство на t, а второе на r, и замечая, что $rt = K\Delta$, находим

$$r_{uu}t = -w_{uu}t\Delta^{\frac{1}{2}} z^{-1} - K\Delta^{-1}p^2r^2 - K^2r^2 - \\ - \Delta^{-1}r(pr_ut + qr_vt) + 2Kp^2rz^{-1} - K\Delta rz^{-1} + 2K\Delta p^2z^{-2};$$

$$r_{vv}r = - w_{vv}K\Delta^{\frac{1}{2}} z^{-1} - K^2q^2 - K^2\Delta^2 - \Delta^{-1} r(pt_ur + qt_vr) + \\ + 2Kq^2rz^{-1} - K\Delta rz^{-1} + 2q^2r^2z^{-2}.$$

Складывая эти равенства почленно и замечая, что

$$r_ut + rt_u = -r\alpha_u - \gamma_u = K_u\Delta - Kpr,$$
$$r_vt + rt_v = -r\alpha_v - \gamma_v = K_v\Delta - 2Kqt,$$

находим в точке X_0

$$r_{uu}t + r_{vv}r = -\Delta^{\frac{1}{2}} z^{-1}(w_{uu}t + w_{vv}r) - Kr^2 + \\ + 2q^2r^2z^{-2} + O_1(z^{-2}, z^{-1}, rz^{-1}),$$

где $O_1(z^{-2}, z^{-1}, rz^{-1})$ — линейное выражение относительно указанных величин с ограниченными коэффициентами.

Вычисляя теперь остальные слагаемые левой части равенства (4), находим

$$2r_u(t_u + \alpha_u) = -2pr(r\Delta^{-1} + z^{-1})(t_u + \alpha_u) = \\ = 2p(r\Delta^{-1} + z^{-1})(-r_ut + \gamma_u) = 2K\Delta^{-1}p^2r^2 + O_2(z^{-2}, rz^{-1});$$
$$-2(s_u - \beta_u)^2 = -2(-qr(t\Delta^{-1} + z^{-1}) + Kq)^2 = \\ = -2q^2r^2z^{-1} + O_3(rz^{-1});$$

$$r\alpha_{uu} = -2Kr^2 + O_4(r);$$
$$\gamma_{uu} = 2Kr^2 - 2K\Delta^{-1}p^2r^2 + O_5(rz^{-1}),$$

где O_2, O_3, O_4 и O_5 — линейные выражения относительно указанных величин с ограниченными коэффициентами.

Подставляя теперь найденные выражения в левую часть уравнения (4), получим:

$$-\Delta^{\frac{1}{2}} z^{-1}(w_{uu}t + w_{vv}r) - Kr^2 + O(z^{-2}, z^{-1}, rz^{-1}, r) = 0.$$

Первое слагаемое левой части этого равенства неположительное, так как $z < 0$, $w_{uu} \leqslant 0$, $w_{vv} \leqslant 0$, $r > 0$, $t > 0$.

Поэтому

$$-Kr^2 + O(z^{-2},\ z^{-1},\ z^{-1}r,\ r) \geqslant 0.$$

Пусть M — верхняя грань модулей коэффициентов выражения O.

Тогда тем более

$$-r^2 + \frac{M}{K_0}(z^{-2} - z^{-1} - rz^{-1} + r + 1) \geqslant 0,$$

откуда следует, что в точке X_0

$$r < 2\sqrt{\frac{M}{K_0}}\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

Но это значит, что максимум функции $w(X)$, а следовательно, и функции $\overline{w}_\gamma(X)$ меньше

$$\frac{2\sqrt{\frac{M}{K_0}}(1-z)}{\sqrt{1-p^2-q^2}}.$$

Так как

$$\overline{w}_\gamma(X) = -z\varkappa_\gamma(X),$$

то оценкой для верхней кривизны в точке X шапочки ω, удалённой на расстояние z от плоскости её края, служит число

$$\frac{2\sqrt{\frac{M}{K_0}}(1+h)}{z\cos\varphi_0},$$

где h — высота шапочки, φ_0 — наибольший угол, который образуют касательные плоскости шапочки с плоскостью её основания, K_0 — минимум гауссовой кривизны и M — постоянная, которая зависит только от верхней грани модулей коэффициентов квадратичной формы ds^2, их производных до четвёртого порядка, минимума дискриминанта этой формы $EG - F^2$ и коэффициентов E и G.

Теорема доказана.

ГЛАВА V

О РЕГУЛЯРНОСТИ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С РЕГУЛЯРНОЙ МЕТРИКОЙ

§ 1. Две леммы о существовании аналитической выпуклой шапочки, реализующей заданную аналитическую метрику с положительной гауссовой кривизной

Лемма 1. *Пусть в ε-окрестности единичного круга $\bar{\omega}$: $+v^2 \leqslant 1$, задана аналитическая метрика с положительной гауссовой кривизной*

$$ds_\alpha^2 = E_\alpha\, du^2 + 2F_\alpha\, du\, dv + G_\alpha\, dv^2,$$

алитически зависящая от параметра α. Пусть окружность круга $\bar{\omega}$ имеет относительно метрики ds_α^2 положительную геодезическую кривизну.

Тогда, если при некотором значении параметра $\alpha = \alpha_0$ метрика ds_α^2 реализуется некоторой выпуклой аналитической шапочкой ω_{α_0}, допускающей аналитическое продолжение за её границу, то и при всех достаточно близких α_0 значениях параметра α она также реализуется некоторой выпуклой аналитической шапочкой ω_α, аналитически продолжаемой за её границу.

Доказательство. Допустим, что существует аналитическая шапочка ω_α, реализующая метрику ds_α^2. Расположим шапочку ω_α так, чтобы её основание лежало в плоскости xy, сама шапочка — в полупространстве $z > 0$. Как показано § 1 настоящей главы, координата z точки (u, v) шапочки ω_α удовлетворяет в круге $\bar{\omega}$ дифференциальному уравнению в частных производных эллиптического типа — уравнени Дарбу — с нулевыми значениями на окружности круга $\overline{\omega}$:

$$\Phi_{\alpha}(r, s, t, p, q, u, v) = 0.$$

При $\alpha = \alpha_0$ уравнение $\Phi_{\alpha} = 0$, очевидно, имеет аналит ческое решение z_{α_0}, аналитически продолжаемое за границ круга $\overline{\omega}$, так как существует аналитическая шапочка ω_{α} реализующая метрику $ds^2_{\alpha_0}$. По известной лемме С. Н. Бер штейна [6] (гл. VII) для значений параметра α, близких к α существует решение $z_{\alpha}(u, v)$ уравнения $\Phi_{\alpha} = 0$, аналити ческое по u, v и α, аналитически продолжаемое за границ круга $\overline{\omega}$, равное нулю на окружности этого круга. Пок жем, что каждому такому решению z_{α}, если $|\alpha - \alpha_0|$ доста точно мало, соответствует аналитически продолжаемая з границу шапочка ω_{α}, реализующая метрику ds^2_{α}.

Рассмотрим квадратичную форму $d\sigma^2_{\alpha}$, заданную в круг $\overline{\omega}$ и достаточно малой его окрестности равенством

$$d\sigma^2_{\alpha} = ds^2_{\alpha} - dz^2_{\alpha}.$$

При $\alpha = \alpha_0$ эта форма положительно определённая и пред ставляет собой линейный элемент плоскости основания ша почки ω_{α_0}, если за координаты u, v точки P этой плоскост взять координаты лежащей над ней точки шапочки. Таки образом, метрика $d\sigma^2_{\alpha_0}$ в круге $\overline{\omega}$ реализуется плоской выпук лой областью — основанием шапочки ω_{α_0}. Кривизна границ этой области, равная геодезической кривизне круга $\overline{\omega}$ отно сительно метрики $d\sigma^2_{\alpha_0}$, положительна.

Так как метрика $d\sigma^2_{\alpha_0}$ аналитически зависит от пара метра α, то геодезическая кривизна круга $u^2 + v^2 = 1$ от носительно метрики $d\sigma^2_{\alpha}$ при малом $|\alpha - \alpha_0|$ тоже положительна а форма $d\sigma^2_{\alpha}$ в круге $\overline{\omega}$ положительно определённая. Вычисля гауссову кривизну с помощью коэффициентов формы $d\sigma^2_{\alpha}$ убеждаемся (см. § 1 настоящей главы), что она с точность до множителя, отличного от нуля, совпадает с Φ_{α} и поэтому равна нулю. Отсюда следует, что метрика $d\sigma^2_{\alpha}$ при мало $|\alpha - \alpha_0|$, рассматриваемая в достаточно малой окрестности круга $\bar{\omega}$, реализуется областью на плоскости xy, причём кругу $\bar{\omega}$ соответствует выпуклая область, ограниченная аналитическим контуром с положительной кривизной.

Пусть $x_\alpha(u, v)$ и $y_\alpha(u, v)$ — координаты точки плоскости xy, соответствующие точке (u, v) круга $\bar{\omega}$ при изометрическом отображении этого круга с метрикой $d\sigma_\alpha^2$ в плоскость xy. Аналитическая поверхность, заданная уравнениями

$$x = x_\alpha(u, v), \quad y = y_\alpha(u, v), \quad z = z_\alpha(u, v),$$

имеет ds_α^2 своим линейным элементом, так как

$$dx_\alpha^2 + dy_\alpha^2 + dz_\alpha^2 = d\sigma_\alpha^2 + dz_\alpha^2 = ds_\alpha^2$$

представляет собой аналитическую выпуклую шапочку ω_α, ущестование которой утверждается леммой 1.

Лемма 2. *Пусть в ε-окрестности круга $\bar{\omega}$: $u^2 + v^2 = 1$, задана аналитическая метрика с положительной гауссовой кривизной*

$$ds_\alpha^2 = E_\alpha du^2 + 2F_\alpha du\, dv + G_\alpha dv^2,$$

аналитически зависящая от параметра α $(\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1)$. Пусть окружность круга $\bar{\omega}$ имеет относительно метрики ds_α^2 положительную геодезическую кривизну для всех α из указанного отрезка.

Тогда, если при $\alpha = \alpha_0$ метрика ds_α^2 реализуется некоторой выпуклой аналитической шапочкой ω_{α_0}, допускающей аналитическое продолжение за её границу, то при $\alpha = \alpha_1$ она также реализуется некоторой выпуклой аналитической шапочкой, аналитически продолжаемой за её границу.

Доказательство. Обозначим через α' точную верхнюю грань чисел α, удовлетворяющих следующему условию. Для каждого α $(\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha')$ метрика ds_α^2 реализуется некоторой аналитической шапочкой, аналитически продолжаемой за её границу. В силу леммы 1 $\alpha_0 < \alpha'$. Покажем, что $\alpha' = \alpha_1$.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ — последовательность чисел из интервала (α_0, α'), сходящаяся к α'. Каждому значению β_k соответствует аналитическая шапочка ω_k, реализующая метрику $ds_{\beta_k}^2$. Обозначим через $r_k(u, v)$ радиус-вектор точки шапочки ω_k, соответствующей точке (u, v) круга $\bar{\omega}$. Не ограничивая общности, можно считать, что вектор-функци $\boldsymbol{r}_k(u, v)$ равномерно ограничены, основание каждой шапочки о лежит в плоскости xy, а сами шапочки — в полупростран стве $z>0$.

В § 3 настоящей главы было показано, что для верхне кривизны каждой шапочки ω_k, а также для угла, образуе мого её касательными плоскостями с плоскостью xy, могу быть указаны внутренние оценки. Из условий леммы следует что эти оценки можно считать не зависящими от k, причё оценка для углов меньше $\frac{\pi}{2}$. С помощью оценки для верхне кривизны могут быть получены оценки для производных вто рого порядка функций $\boldsymbol{r}_k(u, v)$.

Возьмём теперь две оси g_1, g_2, проходящие через начал координат, не лежащие в одной плоскости с осью z и обра зующие с ней углы, не превосходящие $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_0\right)$, гд ϑ_0 — максимум углов, образуемых касательными плоскостям всех шапочек ω_k с плоскостью xy.

Пусть $\xi_k(u, v)$ и $\eta_k(u, v)$ — проекции вектора $\boldsymbol{r}_k(u, v$ на эти оси. Каждая из функций $z_k(u, v)$, $\xi_k(u, v)$, $\eta_k(u, v$ удовлетворяет уравнению в частных производных второг порядка эллиптического типа — уравнению Дарбу. В сил теоремы 2 дополнения II для производных четвёртого порядк функций z_k, ξ_k и η_k в круге $u^2+v^2\leqslant 1-\varepsilon_1$ $(\varepsilon_1>0)$ могу быть получены оценки, так как известны оценки для произ водных первых двух порядков. Принимая во внимание харак тер зависимости уравнений для z_k, ξ_k, η_k от β_k, можно ука зать оценки для четвёртых производных функций z_k, ξ_k, η_k не зависящие от k. С помощью оценок для производны функций ξ_k, η_k, z_k могут быть получены оценки производ ных вектор-функций $\boldsymbol{r}_k(u, v)$. Таким образом, можно счи тать, что четвёртые производные вектор-функций $\boldsymbol{r}_k(u, v$ в круге $u^2+v^2\leqslant 1-\varepsilon_1$ равномерно (по k) ограничены.

Так как последовательность вектор-функций $\boldsymbol{r}_k(u, v$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна *), т

*) Если M — верхняя грань коэффициентов форм ds_α^2 для α и отрезка $[\alpha_0, \alpha_1]$ и (u, v) из круга $\bar{\omega}$, то

$$|\boldsymbol{r}_k(u'', v'')-\boldsymbol{r}_k(u', v')|\leqslant\sqrt{M}\sqrt{(u''-u')^2+(v''-v')^2}.$$

можно выделить из неё сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что сама последовательность $r_k(u, v)$ сходится к некоторой функции $r(u, v)$. Сходимости вектор-функций $r_k(u, v)$ соответствует сходимость шапочек ω_k к некоторой выпуклой шапочке ω с радиус-вектором $r(u, v)$, реализующей метрику $ds^2_{\alpha'}$.

Из равномерной ограниченности четвёртых производных функций $r_k(u, v)$ в круге $u^2+v^2<1-\varepsilon_1$ следует трёхкратная дифференцируемость предельной функции $r(u, v)$ в этом круге, а следовательно, и во всем круге $\bar{\omega}$, исключая, быть может, его границу.

Из трёхкратной дифференцируемости функции $r(u, v)$ внутри круга следует трёхкратная дифференцируемость проекций $z(u, v)$, $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ вектора $r(u, v)$ на оси z, g_1, g_2. Так как каждая из функций ξ, η, z удовлетворяет аналитическому уравнению эллиптического типа, то по известной теореме С. Н. Бернштейна об аналитичности решений уравнений эллиптического типа функции ξ, η, z — аналитические внутри круга $\bar{\omega}$.

Дискриминант уравнения Дарбу для функции z существенно больше нуля во всём круге $\bar{\omega}$, так как касательные плоскости шапочки ω образуют с плоскостью xy углы, не превосходящие ϑ_0, а гауссова кривизна шапочки существенно положительна.

Отсюда по одной теореме С. Н. Бернштейна [6] (гл. VII) следует, что функция z допускает аналитическое продолжение за границу круга $\bar{\omega}$. Поэтому аналитическая метрика $d\sigma^2_{\alpha'}$, с помощью которой определяются две другие координаты (x и y) вектора $r(u, v)$, задана не только в круге $\bar{\omega}$, но и в некоторой его окрестности. Отсюда следует, что функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ и $z(u, v)$ аналитически продолжаются за границу круга $\bar{\omega}$. Таким образом, шапочка ω — аналитическая, реализует метрику $ds^2_{\alpha'}$ и аналитически продолжается за границу. В силу леммы 1 α' не может быть меньше α_1.

Лемма 2 доказана.

§ 2. Существование аналитической выпуклой шапочки, реализующей заданную аналитическую метрику

Теорема 1. *Пусть в ε-окрестности круга $\bar{\omega}$: $u^2+v^2\leqslant 1$, линейным элементом ds^2 задана аналитическая метрика с положительной гауссовой кривизной, причём окружность γ круга $\bar{\omega}$ имеет относительно метрики ds^2 всюду положительную геодезическую кривизну. Пусть каждая геодезическая относительно метрики ds^2, проведённая из центра круга $\bar{\omega}$, встречает окружность круга в точке, расстояние которой вдоль этой геодезической меньше $\frac{1}{\sqrt{K_2}}$, где K_2 — максимум гауссовой кривизны в круге $\bar{\omega}$.*

Тогда существует аналитическая шапочка ω, реализующая метрику ds^2, заданную в круге $\bar{\omega}$.

Доказательство. Введём в круге $\bar{\omega}$ полярные геодезические координаты ρ, ϑ относительно метрики ds^2, взяв центр O круга $\bar{\omega}$ за полюс. Линейный элемент ds^2 в этих координатах имеет вид

$$ds^2=d\rho^2+c^2(\rho,\ \vartheta)\,d\vartheta^2,$$

причём $c(0,\ \vartheta)=0,\ c_\rho(0,\ \vartheta)=1$.

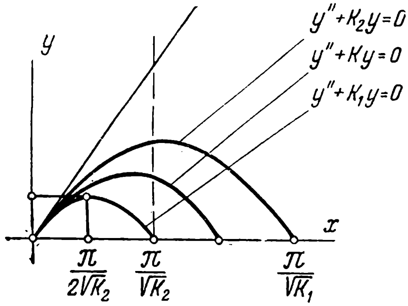
Так как гауссова кривизна $K=-\frac{c_{\rho\rho}}{c}$, то вдоль каждой геодезической, выходящей из точки O, коэффициент c^2 линейного элемента ds^2 удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$y''+Ky=0$$

и начальным условиям при $\rho=0$ $y=0,\ y'=1$. Если $K_1\leqslant K\leqslant K_2$, то, как известно, интегральная кривая этого уравнения в полосе $0\leqslant\rho\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{K_2}}$ заключена между интегральными кривыми уравнений

$$y''+K_1y=0,\qquad y''+K_2y=0$$

при тех же начальных условиях (черт. 19). Отсюда следует, что $c(\rho,\ \vartheta)$, будучи выпуклой функцией по ρ при фиксированном ϑ монотонно растёт по крайней мере в интервале $\left(0, \frac{1}{\sqrt{K_2}}\right)$ (см. чертёж), и следовательно, координатная сеть ρ, ϑ может быть введена во всём круге $\bar{\omega}$ и некоторой его окрестности.



Черт. 19.

Пусть $\rho = \rho(\vartheta)$ — уравнение окружности γ круга $\bar{\omega}$ в координатах ρ, ϑ. Покажем, что геодезическая кривизна кривой γ, заданной уравнением $\rho = \alpha\rho(\vartheta)$, больше, чем геодезическая кривизна кривой γ в точках, соответствующих одним и тем же значениям ϑ.

Действительно, рассмотрим четырёхугольник $ABA_\alpha B_\alpha$ (черт. 20), ограниченный координатными геодезическими $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta$ и дугами кривых γ и γ_α. Длина дуги $A_\alpha B_\alpha$ меньше длины дуги AB, так как они равны

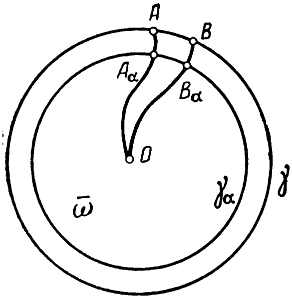
$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\Delta\vartheta} \sqrt{\alpha\rho' + c^2(\alpha\rho, \vartheta)}\, d\vartheta,$$

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\Delta\vartheta} \sqrt{\rho'^2 + c^2(\rho, \vartheta)}\, d\vartheta$$

соответственно, а $c(\rho_1, \vartheta) < c(\rho_2, \vartheta)$, если $\rho_1 < \rho_2 < \frac{1}{\sqrt{K_2}}$. Применяя к четырёхугольнику $A_\alpha B_\alpha AB$ теорему Гаусса — Боннэ и замечая, что геодезические $\vartheta = \mathrm{const}$. пересекают кривые γ_α и γ под равными углами, получим

$$\int\limits_{(A_\alpha)}^{(B_\alpha)} \varkappa(\vartheta, \alpha)\, ds_\alpha - \int\limits_{(A)}^{(B)} \varkappa(\vartheta)\, ds = \iint\limits_{(A_\alpha B_\alpha AB)} K(\rho, \vartheta)\, d\sigma,$$

где $\varkappa(\vartheta, \alpha)$ и $\varkappa(\vartheta)$ — геодезические кривизны кривых γ и γ_α, а K — гауссова кривизна. Отсюда



Черт. 20.

$$\varkappa_\alpha^* \Delta s_\alpha - \varkappa^* \Delta s = K^* \Delta\sigma,$$

где $\varkappa_\alpha^*$, $\varkappa^*$ — средние значения геодезических кривизн кривых γ_α и γ на участках $A_\alpha B_\alpha$ и AB соответственно, а K^* — среднее значение гауссовой кривизны четырёхугольника. Деля полученное равенство на Δs_α и замечая, что $\frac{\Delta s}{\Delta s_\alpha} > 1$, в пределе при $\Delta s \to 0$ получим

$$\varkappa_\alpha(\vartheta) - \varkappa(\vartheta) > 0.$$

Пусть $\bar{\omega}_\alpha$ — область в круге $\bar{\omega}$, ограниченная кривой γ_α. Отобразим эту область на круг $\bar{\omega}$, ставя в соответствие точке области $\bar{\omega}_\alpha$ с координатами ρ, ϑ точку круга с координатами $\frac{1}{\alpha}\rho$, ϑ. При этом кривой γ_α соответствует окружность γ. Это отображение очевидным образом продолжается в отображение окрестности области ω_α в окрестность круга $\bar{\omega}$. Метрика ds^2, рассматриваемая в окрестности области ω_α, переходит в метрику ds_α^2, заданную в окрестности круга $\bar{\omega}$.

Так как метрика ds_α^2 аналитически зависит от параметра α и геодезическая кривизна окружности γ относительно этой метрики положительна, то в силу леммы 2 предыдущего параграфа метрика ds^2 в круге $\bar{\omega}$ реализуема аналитической выпуклой шапочкой, аналитически продолжаемой за её границу, если реализуема метрика ds_α^2, хотя бы при каком-нибудь значении параметра $\alpha \neq 0$, или, что то же самое, если реализуема метрика ds^2, рассматриваемая в области $\bar{\omega}_\alpha$.

Пусть

$$\widetilde{ds}^2 = d\rho^2 + \tilde{c}^2 d\vartheta^2$$

— линейный элемент сферы S радиуса $\frac{1}{\sqrt{K_0}}$, где K_0 — гауссова кривизна в центре круга $\bar{\omega}$ относительно метрики ds^2 в полярных геодезических координатах. Рассмотрим метрику $\widetilde{ds}^2_\beta$, заданную в круге $\bar{\omega}$ линейным элементом

$$\widetilde{ds}^2_\beta = d\rho^2 + [\beta c + (1-\beta)\tilde{c}]^2 d\vartheta^2, \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant 1.$$

В точке O функции $c(\rho, \vartheta)$ и $\tilde{c}(\rho, \vartheta)$ совпадают вместе с их производными до второго порядка. Поэтому при достаточно малом $\alpha = \alpha_0$ метрика $\widetilde{ds}^2_\beta$ в окрестности области $\bar{\omega}_{\alpha_0}$ имеет положительную гауссову кривизну, а кривая γ_{α_0} не только относительно метрики ds^2, но и относительно каждой метрики $\widetilde{ds}^2_\beta$ имеет положительную геодезическую кривизну.

Отсюда следует, что метрика ds^2, рассматриваемая в области $\bar{\omega}_{\alpha_0}$ и достаточно малой её окрестности, реализуема выпуклой шапочкой, аналитически продолжаемой за её границу, если реализуема метрика $\widetilde{ds}^2$. Если $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$ — область на сфере S, ограниченная кривой $\tilde{\gamma}_{\alpha_0}$ с тем же уравнением в полярных геодезических координатах ρ, ϑ, что и у кривой γ_{α_0}, то реализуемость метрики $\widetilde{ds}^2$, рассматриваемой в области ω_α, аналитической шапочкой, аналитически продолжаемой за её границу, равносильна существованию такой шапочки, изометричной $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$.

Спроектируем кривую $\tilde{\gamma}_{\alpha_0}$ из центра сферы S на касательную плоскость σ к сфере S в точке $\rho = 0$. В результате получим выпуклую кривую $\tilde{\gamma}'_{\alpha_0}$ с положительной кривизной. Введём на плоскости σ полярные координаты r, φ, приняв направление $\vartheta = 0$ на сфере S за направление $\varphi = 0$ на плоскости σ. Пусть

$$r = f(\varphi)$$

— уравнение кривой $\tilde{\gamma}'_{\alpha_0}$ в полярных координатах r, φ. Рассмотрим кривую λ_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ в плоскости σ, заданную уравнением

$$r = \frac{f(\varphi)}{(1-t) + tf(\varphi)}.$$

Эта кривая имеет всюду положительную кривизну при каждом значении t из указанного сегмента и при $t=0$ совпадает с кривой $\tilde{\gamma}'_{\alpha_0}$, а при $t=1$ — с окружностью $r=1$ *).

Спроектируем кривую λ_t на сферу S из её центра и обозначим через $\tilde{\omega}_{\alpha_0, t}$ выпуклую область, ограниченную этой проекцией на сфере.

Для того чтобы существовала аналитическая шапочка, аналитически продолжаемая за её границу, изометричная области $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$, достаточно, чтобы такая шапочка существовала хотя бы для одной области $\tilde{\omega}_{\alpha_0, t}$. Но для $\tilde{\omega}_{\alpha_0, 1}$ такая шапочка действительно существует — это сегмент сферы S, в который проектируется круг $r < 1$ плоскости σ. Следовательно, существует аналитическая шапочка, аналитически продолжаемая за её границу, изометричная области $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$ сферы S, а тогда существует подобного рода шапочка, реализующая метрику $ds^2_{\alpha_0}$, заданную в круге $\bar{\omega}$, и, наконец, существует аналитическая шапочка, реализующая метрику ds^2 в этом круге.

Теорема доказана.

---

*) В этом утверждении, может быть, не совсем очевидно то, что кривая λ_t имеет положительную кривизну. Но это просто следует из того, что кривизна кривой, заданной в полярных координатах r, φ уравнением $r = p(\varphi)$, равна

$$\frac{\frac{1}{p} + \left(\frac{1}{p}\right)''}{\left(1 + \left(\frac{1}{p}\right)'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 3. Регулярность выпуклых поверхностей с регулярной метрикой

Теорема 1. *Если выпуклая поверхность имеет регулярную (m раз дифференцируемую, $m \geqslant 5$) метрику и положительную гауссову кривизну, то она регулярна (по крайней мере $m-1$ раз дифференцируема).*

Доказательство. Пусть Φ — выпуклая поверхность, удовлетворяющая условиям теоремы. Согласно теореме 4 § 3 гл. II эта поверхность гладкая и существенно выпуклая в том смысле, что каждая касательная плоскость поверхности Φ имеет с ней только одну общую точку — точку касания.

Пусть O — произвольная точка поверхности Φ. Отрежем от поверхности Φ плоскостью, параллельной касательной плоскости в точке O, маленькую выпуклую шапочку ω с внутренним диаметром меньше $\frac{1}{\sqrt{K_2}}$, где K_2 — максимум гауссовой кривизны шапочки. Это возможно, так как поверхность Φ существенно выпуклая, и следовательно, при достаточной близости секущей плоскости к точке O отрезаемая ею шапочка ω будет иметь сколь угодно малый внутренний диаметр. Обозначим через γ границу шапочки ω.

Впишем в кривую γ геодезическую ломаную с малыми звеньями, а затем сгладим её в вершинах с помощью геодезических кругов малого радиуса. В результате получим внутренне гладкую выпуклую кривую γ_1, близкую к кривой γ. Сместим теперь каждую точку X этой кривой вдоль кратчайшей к точке O на расстояние, равное $\varepsilon_1 d$, где d — первоначальное расстояние между X и O на поверхности Φ. При таком преобразовании кривой γ_1 геодезическая кривизна увеличивается, и мы получим некоторую кривую, у которой в каждой точке справа и слева существует, и притом положительная, геодезическая кривизна. Очевидно, эту кривую, которую мы обозначим через γ_2, можно считать сколь угодно близкой к кривой γ. Для этого надо взять только достаточно малыми звенья ломаной, вписываемой в кривую γ, и достаточно малым число ε_1.

Пусть u, v — координатная сеть на поверхности Φ,

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv - G\,dv^2$$

— линейный элемент поверхности, причём коэффициенты E,

F, G — пять раз дифференцируемые функции переменных u, v. Построим последовательности аналитических функций E_n, F_n, G_n, сходящиеся к E, F, G равномерно с их производными до пятого порядка включительно в области ω поверхности Φ. Рассмотрим метрику, заданную в области ω квадратичной формой

$$ds_n^2 = E_n du^2 + 2F_n du\, dv + G_n dv^2.$$

Если n достаточно велико, гауссова кривизна, вычисленная с помощью коэффициентов формы ds_n^2, сколь угодно близка к гауссовой кривизне поверхности ω, геодезическая кривизна кривой γ_2 относительно метрики ds_n^2 в каждой точке существует справа и слева, причём она больше нуля; внутренний диаметр относительно метрики ds_n^2 области, ограниченной кривой γ_2, меньше $\frac{1}{\sqrt{K_2^{(n)}}}$, где $K_2^{(n)}$ — максимум гауссовой кривизны в этой области относительно метрики ds_n^2.

Введём в области ω поверхности Φ полярные геодезические координаты ρ, ϑ, приняв точку O за полюс.

Пусть $\rho = \varphi(\vartheta)$ — уравнение кривой γ_2 в координатах ρ, ϑ. Очевидно, функция $\varphi(\vartheta)$ непрерывна, имеет непрерывную первую производную, непрерывную и равномерно ограниченную производную второго порядка всюду, кроме конечного числа точек, в которых происходит разрыв непрерывности первого рода.

Построим функции $\psi_\delta^+(\vartheta)$ и $\psi_\delta^-(\vartheta)$ следующим образом:

$$\psi_\delta^+(\vartheta) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \varphi''(\vartheta + h); \qquad \psi_\delta^-(\vartheta) = \inf_{|h| \leqslant \delta} \varphi''(\vartheta + h).$$

Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, всегда существует аналитическая функция $\bar{\varphi}(\vartheta)$, удовлетворяющая условиям:

$$\bar{\varphi}(\vartheta + 2\pi) = \bar{\varphi}(\vartheta),$$

$$|\varphi(\vartheta) - \bar{\varphi}(\vartheta)| < \varepsilon, \quad |\varphi'(\vartheta) - \bar{\varphi}'(\vartheta)| < \varepsilon,$$

$$\psi_\delta^-(\vartheta) - \varepsilon < \bar{\varphi}''(\vartheta) < \psi_\delta^+(\vartheta) + \varepsilon.$$

Обозначим через γ_3 кривую на поверхности Φ, заданную в координатах ρ, ϑ уравнением $\rho = \bar{\varphi}(\vartheta)$. Эта кривая при достаточно малых ε и δ имеет во всех точках положительную геодезическую кривизну. Действительно, выражение для геодезической кривизны кривой, заданной уравнением $\rho = \bar{\varphi}(\vartheta)$, имеет вид

$$a(\vartheta, \rho, \rho')\rho'' + b(\vartheta, \rho, \rho'),$$

где a и b — непрерывные функции своих аргументов. Если в это выражение подставить вместо ρ, ρ' и ρ'' функции $\varphi(\vartheta)$, $\varphi'(\vartheta)$, $\varphi''(\vartheta+0)$ или $\varphi''(\vartheta-0)$ соответственно, то получится положительное число при каждом ϑ. Отсюда в силу непрерывности функций a и b следует, что если вместо указанных величин подставить $\bar{\varphi}(\vartheta)$, $\bar{\varphi}'(\vartheta)$ и $\bar{\varphi}''(\vartheta)$, то при достаточно малых ε и δ полученное число будет положительным при каждом ϑ, и следовательно, геодезическая кривизна кривой γ_3 во всех точках больше нуля.

Отобразим конформно область $\tilde{\omega}$ плоскости, ограниченную кривой с уравнением $\rho = \bar{\varphi}(\vartheta)$ в полярных координатах, на единичный круг $\bar{\omega}: x^2 + y^2 = 1$, так, чтобы центру круга соответствовала точка $\rho = 0$. Как известно, это отображение является аналитическим и допускает аналитическое продолжение за границу указанной области. Введём в достаточно малой окрестности круга $\bar{\omega}$ координатную сеть ρ, ϑ, соответствующую сети ρ, ϑ области $\tilde{\omega}$.

Отобразим теперь достаточно малую окрестность области ω''', ограниченной кривой γ_3 на поверхности Φ, на окрестность круга $\bar{\omega}$, ставя в соответствие точки с одинаковыми координатами ρ, ϑ. Теперь метрику ds_n^2, заданную в области ω поверхности Φ, можно рассматривать в круге $\bar{\omega}$. Так как для неё выполнены условия теоремы 1 предыдущего параграфа, то она реализуется некоторой аналитической выпуклой шапочкой ω_n.

Построим теперь последовательность кривых $\gamma_3^{(k)}$ типа γ_3, сходящуюся к границе шапочки ω. Для каждого k может быть построена аналитическая шапочка ω_{n_k}, реализующая метрику $ds^2_{n_k}$, рассматриваемую в области, ограниченной кривой $\gamma_3^{(k)}$.

Расположим шапочки ω_{n_k} так, чтобы их основания лежали в плоскости xy, а сами шапочки в полупространстве $z > 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что шапочки ω_{n_k} сходятся к некоторой выпуклой шапочке, равной ω. Между точками шапочки ω_{n_k} и точками некоторой области шапочки ω установлено топологическое соответствие, при котором соответствующими являются точки с одинаковыми координатами ρ, ϑ. Это позволяет перенести на шапочку ω_{n_k} координатную сеть u, v, относительно которой её линейный элемент есть

$$ds^2_{n_k} = E_n\, du^2 + 2F_n\, du\, dv + G_n\, dv^2.$$

Обозначим через $r_k(u, v)$ радиус-вектор шапочки ω_{n_k}.

Пусть ω^* — область на поверхности Φ, расположенная вместе со своей границей на шапочке ω. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом k соответствующие ω^* области $\omega^*_{n_k}$ на шапочках ω_{n_k} удалены от плоскости xy на расстояние, не меньшее ε, а касательные плоскости шапочек $\tilde{\omega}_{n_k}$, которые отрезает плоскость $z = \frac{\varepsilon}{2}$ от шапочек ω_{n_k}, образуют с плоскостью xy углы, не меньшие $\frac{\pi}{2} - \bar{\varepsilon}$, где $\bar{\varepsilon} > 0$.

С помощью теоремы 1 § 4 гл. IV для верхней кривизны шапочки ω_{n_k} в области $\omega^*_{n_k}$ можно указать оценку, годную для всех k. Это даёт возможность указать оценки для вторых производных вектор-функции $r_k(u, v)$, не зависящие от k.

Покажем, что третьи производные вектор функций $r_k(u, v)$ также равномерно (по k) ограничены в области $\omega^*_{n_k}$ и удовлетворяют условию Гёльдера:

$$|r_k'''(u'', v'') - r_k'''(u', v')| \leqslant c\,[(u'' - u')^2 + (v'' - v')^2]^{\frac{\alpha}{2}}$$

с показателем $\alpha > 0$ и постоянной Гёльдера c, не зависящими от k. Для этого воспользуемся результатами дополнения II.

Возьмём две оси g_1 и g_2, проходящие через начало координат, не лежащие в одной плоскости с осью z и образующие с ней углы, не превосходящие $\frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $\xi_k(u, v)$, $\eta_k(u, v)$, $z_k(u, v)$ — проекции вектора $\boldsymbol{r}_k(u, v)$ на оси g_1, g_2 и z. Каждая из функций $\xi_k(u, v)$, $\eta_k(u, v)$, $z_k(u, v)$ удовлетворяет уравнению в частных производных второго порядка эллиптического типа — уравнению Дарбу. В силу теорем 1 и 2 дополнения II для третьих производных функций $\xi_k(u, v)$, $\eta_k(u, v)$, $z_k(u, v)$, а также для наименьших постоянных Гёльдера для этих производных, соответствующих показателю α $(0 < \alpha < 1)$ могут быть указаны оценки. Принимая во внимание характер сходимости метрик $ds^2_{n_k}$ к метрике ds^2, можно считать, что эти оценки не зависят от k. Отсюда следует, что предельные функции $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, $z(u, v)$ — проекции вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ шапочки ω на оси g_1, g_2, z в области ω^* дифференцируемы по крайней мере три раза. Из теоремы 1 дополнения I отсюда следует, что предельные функции $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, $z(u, v)$ дифференцируемы по крайней мере $m-1$ раз, где m — порядок дифференцируемости метрики ds^2.

Так как проекции вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ на оси g_1, g_2 и z $m-1$ раз дифференцируемы в области ω^*, то и сам вектор $\boldsymbol{r}(u, v)$ дифференцируем в этой области $m-1$ раз. Поскольку вершина O шапочки ω взята произвольно, то вся поверхность Φ дифференцируема по крайней мере $m-1$ раз.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Выпуклая поверхность с аналитической метрикой и положительной гауссовой кривизной — аналитическая.*

Эта теорема очевидным образом следует из теоремы 1 и теоремы С. Н. Бернштейна об аналитичности решений уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа.

ГЛАВА VI

СУЩЕСТВОВАНИЕ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ДАННОЙ МЕТРИКОЙ

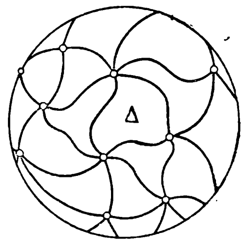
§ 1. Существование выпуклого многогранника с данной метрикой

В 1916 г. Г. Вейль поставил следующую проблему.

Пусть на сфере задана метрика аналитическим линейным элементом ds^2, причём гауссова кривизна, вычисленная с помощью коэффициентов формы ds^2 по обычной формуле дифференциальной геометрии, всюду больше нуля. Существует ли замкнутая выпуклая поверхность, реализующая метрику ds^2?

Сам Вейль наметил решение поставленной им проблемы и доказал, что если заданная на сфере аналитическая метрика ds^2 с положительной гауссовой кривизной реализуема аналитической поверхностью, то каждая достаточно близкая к ds^2 аналитическая метрика с положительной кривизной также реализуема некоторой замкнутой выпуклой аналитической поверхностью. Решение проблемы Вейля было завершено Г. Леви в 1937 г. благодаря использованию довольно тонких результатов, полученных им в теории аналитических уравнений Монжа — Ампера эллиптического типа.

В 1941 г. А. Д. Александров дал новое, построенное на совершенно других, чем у Вейля и Леви, соображениях, удивительно простое решение проблемы Вейля. Он доказал не только реализуемость аналитической метрики с положительной кривизной, заданной на сфере, но реализуемость заданной на сфере общей выпуклой метрики. Опуская точное определение такой метрики, укажем только, что метрика общей выпуклой поверхности является таковой. А. Д. Александров сначала устанавливает реализуемость заданных на сфере так называемых выпуклых многогранных метрик, которые реализуются замкнутыми выпуклыми многогранниками, а затем, путём предельного перехода, устанавливает реализуемость общих выпуклых метрик, получая в частном случае решение проблемы Вейля. В следующем параграфе мы воспроизведём доказательство А. Д. Александрова теоремы Вейля, основанное на теореме о реализуемости заданной на сфере выпуклой многогранной метрики. Что касается доказательства этой теоремы, то его можно найти в книге А. Д. Александрова [1] или [7]. Мы ограничимся только формулировкой в удобной нам форме этой замечательной теоремы.



Черт. 21.

Пусть задано разбиение T сферы ω или многообразия, гомеоморфного сфере, на конечное число топологических треугольников Δ так, что каждая сторона треугольника Δ является стороной некоторого другого треугольника разбиения сферы (черт. 21).

Пусть каждому треугольнику Δ сопоставлен евклидовский треугольник Δ' и установлено соответствие между сторонами и вершинами треугольников Δ и Δ', сохраняющее инцидентность (т. е. соответствующие стороны соединяют соответствующие вершины).

Пусть, наконец, стороны евклидовских треугольников, соответствующие общей стороне двух топологических треугольников, равны, а сумма углов при вершинах евклидовских треугольников Δ', соответствующих данной общей вершине топологических треугольников Δ, не превосходит 2π.

Тогда существует замкнутый выпуклый многогранник P (или дважды покрытый выпуклый многоугольник), который допускает разбиение на геодезические треугольники Δ'', изометричные треугольникам Δ', расположенные на P так, как соответствующие им топологические треугольники Δ расположены на сфере ω. Иначе говоря, из треугольников Δ' путём их изгибания и «склеивания» вдоль соответствующих сторон можно построить замкнутый выпуклый многогранник.

Многогранник P определяется единственным образом в том смысле, что любой другой замкнутый выпуклый многогранник P', обладающий свойствами многогранника P, равен P'. Точнее, движением или движением и зеркальным отображением многогранника P' можно расположить его так, что геодезические треугольники многогранников P и P', соответствующие одному и тому же криволинейному треугольнику на сфере ω, совпадут.

Утверждение о единственности многогранника P было доказано Коши в 1813 г., правда, в несколько иной формулировке.

Из приведённой выше теоремы А. Д. Александрова легко следует теорема о склеивании для многогранников, также принадлежащая А. Д. Александрову.

Пусть дано разбиение R сферы ω или многообразия, гомеоморфного сфере, на конечное число топологических многоугольников Q — так, что каждая сторона многоугольника Q является стороной другого многоугольника разбиения сферы.

Пусть каждому многоугольнику Q сопоставлен выпуклый многогранник Q' с границей и установлено взаимно однозначное соответствие между рёбрами и вершинами многогранника Q' вдоль его границы и сторонами и вершинами многоугольника Q, сохраняющее инцидентность.

Пусть, наконец, стороны многогранников Q', соответствующие общей стороне двух топологических многоугольников Q, равны, а сумма углов при вершинах многогранников Q', соответствующих данной общей вершине топологических многоугольников Q, не превосходит 2π.

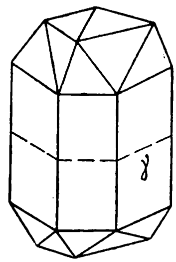
Тогда существует замкнутый выпуклый многогранник P (или дважды покрытый выпуклый многоугольник), который допускает разбиение на геодезические многоугольники Q'', изометричные многогранникам Q' и расположенные на P так, как соответствующие им топологические многоугольники Q на сфере ω. Иначе говоря, из многогранников Q' путём их изгибания и «склеивания» вдоль соответствующих сторон можно построить замкнутый выпуклый многогранник.

Многогранник P определяется однозначно с точностью до движения и зеркального отображения.

Эта теорема легко следует из предыдущей. Надо каждый многоугольник Q разбить на топологические треугольники так, как разбит многогранник Q', соответствующий Q, его рёбрами, а затем воспользоваться предыдущей теоремой.

Воспользуемся теоремой о склеивании для доказательства существования многогранной выпуклой шапочки, изометричной данному выпуклому многограннику с внутренне выпуклой границей.

Пусть P — выпуклый многогранник, гомеоморфный кругу, у которого полный угол при каждой вершине, лежащей на его границе, меньше π. Тогда существует многогранная выпуклая шапочка Q, изометричная P.



Черт. 22.

Согласно теореме о склеивании, из двух экземпляров многогранника P и призматической трубки с периметром поперечного сечения, равным длине ломаной, ограничивающей многогранник, можно склеить замкнутый выпуклый многогранник (черт. 22). Так как метрика этого многогранника симметрична относительно средней линии трубки γ, то в силу теоремы Коши кривая γ должна быть плоской, а плоскость кривой γ должна быть плоскостью симметрии. Отсюда следует, что область, изометричная P на этом многограннике, есть выпуклая многогранная шапочка.

Таким же способом доказывается следующая теорема.

Пусть задано разбиение T круга ω, или области, гомеоморфной кругу, на конечное число топологических треугольников Δ так, что каждая сторона треугольника Δ является стороной некоторого другого треугольника разбиения круга или лежит на его границе.

Пусть каждому треугольнику Δ сопоставлен евклидовский треугольник Δ' и установлено соответствие между сторонами и вершинами треугольников Δ и Δ', сохраняющее инцидентность.

Пусть стороны евклидовских треугольников, соответствующие общей стороне двух топологических треугольников, равны, сумма углов при вершинах евклидовских треугольников Δ', соответствующих данной общей вершине топологических треугольников Δ, лежащей внутри круга ω, не превосходит 2π, а сумма углов при вершинах евклидовских треугольников Δ', соответствующих общей вершине топологических треугольников Δ, лежащей на границе круга ω, не превосходит π.

Тогда существует выпуклый многогранник с плоским краем, который вместе со своим зеркальным изображением в плоскости края образует замкнутый выпуклый многогранник (вырождение многогранника в дважды покрытый выпуклый многоугольник не исключается), причём этот многогранник составлен из треугольников Δ'', изометричных Δ' так же, как круг ω из треугольников Δ.

§ 2. Существование регулярной выпуклой поверхности, реализующей заданную на сфере регулярную метрику с положительной гауссовой кривизной. Теорема Вейля

Теорема 1. *Пусть на сфере ω (или на многообразии, гомеоморфном сфере) задана регулярная (m раз дифференцируемая, $m \geqslant 5$) метрика ds^2 с положительной гауссовой кривизной.*

Тогда существует регулярная (по крайней мере $m-1$ раз дифференцируемая) замкнутая выпуклая поверхность, реализующая эту метрику.

Лемма 1. *Пусть в двумерной области G задана регулярная метрика ds^2 с неотрицательной гауссовой кривизной. Пусть Δ — малый геодезический треугольник в этой области относительно метрики ds^2, а Δ_0 — плоский треугольник со сторонами той же длины.*

Тогда углы плоского треугольника Δ_0 не больше соответствующих углов треугольника Δ в метрике ds^2.

Доказательство. Введём в области G полярные геодезические координаты ρ, ϑ относительно метрики ds^2, взяв за полюс O какую-нибудь вершину треугольника Δ. Линейный элемент ds^2 в этих координатах будет

$$ds^2 = d\rho^2 + c^2 d\vartheta^2,$$

причём в точке O имеем $c = 0$, $c_\rho = 1$. Так как, кроме того,

$$-\frac{c_{\rho\rho}}{c} = K \geqslant 0,$$

то $c^2 \leqslant \rho^2$.

Рассмотрим теперь метрику, заданную в области G в координатах ρ, ϑ формой

$$ds_1^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2.$$

Очевидно, эта метрика реализуется на плоскости, так как $d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2$ есть линейный элемент в плоскости в полярных координатах. Соединим вершины треугольника Δ, отличные от O, кратчайшей γ_1 относительно метрики ds_1^2. Длина l_1 кривой γ_1 относительно метрики ds_1^2 не меньше, чем длина её относительно метрики ds^2, так как $ds^2 \leqslant ds_1^2$. Поэтому l_1 не меньше стороны треугольника Δ, противолежащей вершине O. Но плоский треугольник Δ_0', у которого две стороны равны сторонам треугольника Δ, сходящимся в вершине O, а третья равна l_1, имеет угол, противолежащий стороне l_1, равный углу треугольника Δ при вершине O. Так как при переходе от треугольника Δ_0' к Δ_0 мы его сторону l_1 заменяем не большей, то угол, противолежащий ей, не увеличивается.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть в двумерной области G задана регулярная метрика ds^2 с неотрицательной гауссовой кривизной. Пусть Δ — малый геодезический треугольник в этой области относительно метрики ds^2, а Δ_0 — плоский треугольник со сторонами той же длины. Пусть $\rho(X, Y)$ — расстояние между точками X и Y, лежащими на сторонах треугольника Δ, а $\rho_0(X, Y)$ — расстояние между соответствующими точками, лежащими на сторонах треугольника Δ_0.*

Тогда $\frac{\rho(X, Y)}{\rho_0(X, Y)} \to 1$, когда стороны треугольника Δ неограниченно убывают, но так, что отношение наибольшей из них и наименьшей остаётся меньше $N < \infty$, а углы заключены в пределах ε, $\pi - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

Доказательство. Сохраняя предыдущие обозначения, будем считать, что точки X и Y находятся на сторонах треугольника Δ, которые сходятся в вершине O. Оценим уменьшение угла ϑ треугольника Δ с вершиной O при переходе к плоскому треугольнику Δ_0.

Пусть γ — сторона треугольника Δ, противолежащая вершине O. Её длина

$$l = \int_{\gamma} \sqrt{\rho'^2 + c^2}\, d\vartheta.$$

Длина той же стороны относительно метрики ds_1^2 равна

$$\int_{\gamma} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\vartheta.$$

Поэтому, переходя от треугольника Δ_0' к Δ_0, мы укорачиваем сторону, противолежащую вершине O, на величину, не превосходящую

$$\delta = \int_{\gamma} \left(\sqrt{\rho'^2 + \rho^2} - \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right) d\vartheta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\gamma} \sqrt{\rho^2 - c^2}\, d\vartheta = \varepsilon' b \vartheta,$$

где ϑ — угол треугольника Δ при вершине O, b — бо́льшая из двух сторон треугольника Δ, которые содержат вершину O, а $\varepsilon' \to 0$, когда $b \to 0$.

Применяя теперь к каждому из треугольников Δ_0' и Δ_0 теорему косинусов, заключаем, что уменьшение $\Delta\vartheta$ угла ϑ при переходе от треугольника Δ_0' к Δ_0 стремится к нулю, когда стороны треугольника Δ неограниченно убывают, но так, что соблюдаются условия леммы.

Пусть $\gamma_1(X, Y)$ — кратчайшая, соединяющая точки X и Y, относительно метрики ds_1^2 и $\rho_1(X, Y)$ — её длина. Тогда

$$\rho_1(X, Y) = \int_{\gamma_1(X, Y)} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\vartheta,$$

$$\rho(X, Y) \leqslant \int_{\gamma_1(X, Y)} \sqrt{\rho'^2 + c^2}\, d\vartheta.$$

Поэтому $\rho(X, Y) \leqslant \rho_1(X, Y)$. Далее,

$$\rho_1(X, Y) - \rho(X, Y) \leqslant \int_{\gamma_1(X, Y)} \sqrt{\rho'^2 - c^2}\, d\vartheta.$$

И так как $c(\rho, \vartheta) = \rho + o(\rho^2)$, то

$$\rho_1(X, Y) - \rho(X, Y) \leqslant \varepsilon_1 \int\limits_{\gamma_1(X, Y)} \rho\, d\vartheta,$$

причём $\varepsilon_1 \to 0$, когда стороны треугольника Δ неограниченно убывают. Замечаем, что $\rho_1(X, Y) > \int\limits_{\gamma_1(X, Y)} \rho\, d\vartheta$, получаем

$$\frac{\rho(X, Y)}{\rho_1(X, Y)} > 1 - \varepsilon_1.$$

С другой стороны,

$$\frac{\rho(X, Y)}{\rho_1(X, Y)} < 1.$$

Так как переход от треугольника Δ_0' к Δ_0 сопровождается незначительным уменьшением угла ϑ, в то время как сам угол ϑ предполагается большим ε и меньшим $\pi - \varepsilon$, то $\frac{\rho_1(X, Y)}{\rho_0(X, Y)}$ также близко к единице, если треугольник Δ достаточно мал, и следовательно, отношение $\frac{\rho_1(X, Y)}{\rho_0(X, Y)} \to 1$, когда стороны треугольника Δ неограниченно убывают, но так, что выполняются условия леммы.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы*). Покроем сферу ω конечным числом малых геодезических треугольников относительно заданной метрики ds^2. Это возможно, так как, очевидно, существует бесконечное покрытие геодезическими треугольниками со сколь угодно малыми сторонами, из которого, по известной теореме, можно выделить конечное покрытие. Стороны этих треугольников разбивают сферу ω на конечное число малых геодезических многоугольников. Каждый такой многоугольник можно, очевидно, его диагоналями разбить на конечное число геодезических треугольников. В результате получится некоторое разбиение T_0 сферы ω на конечное число геодезических треугольников.

Определим теперь последовательность разбиений сферы T_1, $T_2, \ldots, T_n, \ldots$ на геодезические треугольники следующим

*) Это доказательство принадлежит А. Д. Александрову.

9 Зак. 2666. А. В. Погорелов.

образом. Разбиение T_1 получается из T_0 путём проведения в каждом треугольнике разбиения T_0 его средних линий и замены, таким образом, одного треугольника четырьмя меньшими, содержащимися в нём. Каждое из последующих разбиений получается из предыдущего так же, как T_1 из T_0.

Относительно геодезических треугольников разбиений T_k сферы ω существенно заметить только, что отношение наибольшей стороны каждого треугольника к его наименьшей стороне равномерно ограничено (по k), а углы каждого треугольника заключены в пределах ε, $\pi-\varepsilon$, где ε — малое положительное число, не зависящее от k.

Сопоставим каждому треугольнику Δ разбиения T_k сферы ω плоский треугольник Δ' со сторонами той же длины. Так как углы треугольника Δ' не больше углов треугольника Δ относительно метрики ds^2 (лемма 1), то сумма углов при вершинах евклидовских треугольников Δ', соответствующих данной общей вершине геодезических треугольников Δ, не превосходит 2π.

По теореме А. Д. Александрова, приведённой в предыдущем параграфе, существует замкнутый выпуклый многогранник P_k (или дважды покрытый выпуклый многоугольник), который допускает разбиение на геодезические треугольники Δ'', изометричные треугольникам Δ', расположенные на P_k так, как соответствующие им геодезические треугольники Δ на сфере ω.

Отобразим сферу ω топологически на многогранник P_k, ставя в соответствие вершинам треугольников Δ соответствующие вершины треугольников Δ'', сторонам треугольников Δ — стороны треугольников Δ'', причём если точка X сферы ω делит сторону треугольника Δ в отношении λ, то соответствующая ей точка на стороне треугольника Δ'' делит эту сторону в том же отношении; что касается соответствия внутренних точек треугольников Δ и Δ'', то оно может быть каким угодно.

Покажем, что установленное нами топологическое отображение φ_k сферы ω на многогранник P_k близко к изометрическому в том смысле, что расстояние $\rho(X, Y)$ между любыми двумя точками X и Y на сфере ω относительно метрики ds^2 отличается не более, чем на ε_k от расстояния $\rho_k(X, Y)$ между соответствующими точками $\varphi_k(X)$ и $\varphi_k(Y)$ на многограннике P_k, причём $\bar{\varepsilon}_k \to 0$, когда $k \to \infty$.

Пусть $\bar{\gamma}_k$ — кратчайшая на многограннике P_k, соединяющая точки $\varphi_k(X)$ и $\varphi_k(Y)$. На сфере ω кривой $\bar{\gamma}_k$ соответствует некоторая кривая γ_k, соединяющая точки X и Y. Сторонами треугольников Δ эта кривая разбивается на отрезки. Заменим каждый такой отрезок кратчайшей, соединяющей его концы. При этом вместо кривой γ_k получим некоторую геодезическую ломаную γ'_k, вершины которой лежат на сторонах треугольников Δ. Относительно каждого звена ломаной γ'_k, кроме, быть может, первого и последнего, можно сказать, что его длина в $1 - \varepsilon_k$ раз меньше соответствующего отрезка кривой $\bar{\gamma}_k$, причём ε_k сколь угодно мало, если k достаточно велико (лемма 2). Поэтому

$$\rho(X, Y) < \frac{\rho_k(X, Y)}{1 - \varepsilon_k} + 2d_k,$$

где d_k — максимум длин сторон треугольников Δ.

Аналогично, поменяв ролями сферу ω и многогранник P_k, приходим к неравенству

$$\rho_k(X, Y) < \frac{\rho(X, Y)}{1 - \varepsilon_k} + 2d_k.$$

Отсюда следует, что для любых точек X и Y

$$|\rho_k(X, Y) - \rho(X, Y)| < \tilde{\varepsilon}_k,$$

причём $\tilde{\varepsilon}_k \to 0$, когда $k \to \infty$.

Пусть $r_k(X)$ — радиус-вектор точки многогранника P_k, соответствующей точке X сферы ω при отображении φ_k. Так как $\rho_k(X, Y) \to \rho(X, Y)$ при $k \to \infty$ равномерно по X и Y, то последовательность вектор-функций $r_k(X)$, рассматриваемых на сфере ω, равностепенно непрерывна. Очевидно, можно считать, что она также равномерно ограничена. Отсюда следует, что последовательность $r_k(X)$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность $r_{k_n}(X)$. Предельной функции $r(X)$ этой подпоследовательности соответствует замкнутая выпуклая поверхность F, заданная векторным уравнением

$$r = r(X),$$

реализующая метрику ds^2 *).

Так как метрика ds^2 дифференцируема m раз, то поверхность F дифференцируема по крайней мере $m-1$ раз (теорема 1 § 3 гл. V).

Как следствие теоремы 1 и теоремы 2 § 3 гл. V получается

Теорема Вейля. *Пусть на сфере (или на многообразии, гомеоморфном сфере) задана аналитическая метрика с положительной гауссовой кривизной.*

Тогда существует замкнутая выпуклая аналитическая поверхность, реализующая эту метрику.

§ 3. Другие теоремы существования

В этом параграфе будет доказан ряд теорем существования выпуклых поверхностей с данной регулярной метрикой. Эти теоремы в классе общих выпуклых поверхностей доказаны А. Д. Александровым [1].

Теорема 1. *Пусть в двумерной области G, гомеоморфной кругу, задана регулярная (m раз дифференцируемая, $m \geqslant 5$) метрика с положительной гауссовой кривизной. Пусть, далее, граница области G есть кусочно гладкая кривая, у которой геодезическая кривизна в гладких точках неотрицательна, а углы в точках нарушения гладкости меньше π.*

Тогда существует регулярная ($m-1$ раз дифференцируемая) выпуклая шапочка F, реализующая заданную в области G метрику.

Если же заданная метрика аналитическая, то реализующая её шапочка F — аналитическая.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 предыдущего параграфа и, если опустить детали, состоит в следующем.

*) Очевидно, эта поверхность не может вырождаться в дважды покрытую выпуклую область плоскости.

Впишем в границу γ области G геодезическую ломаную $\bar{\gamma}$ с малыми звеньями. Покроем теперь область $\bar{G}$, ограниченную ломаной $\bar{\gamma}$, конечным числом геодезических треугольников. Стороны этих треугольников разбивают область $\bar{G}$ на малые геодезические многоугольники. Разобьём их диагоналями на геодезические треугольники. Полученное разбиение области $\bar{G}$ на треугольники обозначим T_0. Затем строим разбиения T_1, T_2, ..., подобно тому как при доказательстве теоремы 1 предыдущего параграфа. Так же как и прежде, строим последовательность выпуклых многогранников P_k с плоским краем, используя при этом последнюю теорему А. Д. Александрова, приведённую в первом параграфе настоящей главы. Предельным переходом доказываем существование выпуклой шапочки F, реализующей заданную в области G метрику.

Регулярность шапочки F (или её аналитичность в случае, если заданная метрика аналитическая) следует из теорем 1, 2 § 3 гл. V.

Теорема 2. *Пусть в двумерной области G задана регулярная (аналитическая) метрика с положительной гауссовой кривизной.*

Тогда каждая точка области G имеет окрестность ω, в которой заданную метрику можно реализовать регулярной (соответственно аналитической) выпуклой поверхностью. Более того, каждая выпуклая поверхность, реализующая эту метрику, регулярна (соответственно, аналитическая).

Эта теорема является простым следствием теоремы 1. Действительно, пусть X — произвольная точка области G и ω — геодезический круг с центром X. Если круг ω достаточно мал, то его окружность имеет всюду положительную геодезическую кривизну.

В силу теоремы 1 существует выпуклая регулярная (соответственно, аналитическая) шапочка, реализующая метрику, заданную в круге ω.

Теорема 3. *Пусть в двумерной области G, гомеоморфной кругу, задана регулярная (соответственно аналитическая) метрика с положительной гауссовой кривизной. Пусть, далее, расстояние точки X области G от* *некоторой фиксированной точки* X_0 *этой области неограниченно растёт, когда точка* X *произвольным образом приближается к границе области* G (*речь идёт о расстоянии между точками в смысле заданной в области* G *метрики*).

Тогда существует бесконечная регулярная (*соответственно аналитическая*) *выпуклая поверхность, реализующая заданную в области* G *метрику.*

Доказательство. Пусть M — множество точек области, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) расстояние каждой точки области G от множества M в заданной метрике не больше единицы;

2) множество M не имеет предельных точек на конечном расстоянии (в смысле заданной метрики).

Пусть M_k — подмножество точек множества M, расстояния которых в заданной метрике от некоторой фиксированной точки O области G не больше k.

В области G можно построить замкнутую выпуклую геодезическую ломаную γ_k, охватывающую множество M_k (см. [7]). Кривая γ_k ограничивает некоторую область G_k. Согласно теореме 1, заданная в G_k метрика реализуется некоторой выпуклой шапочкой F_k. Переходя к пределу по надлежащим образом выбранной подпоследовательности шапочек F_k, получим бесконечную выпуклую поверхность, существование которой утверждается теоремой.

Теорема доказана *).

§ 4. «Теорема о склеивании» А. Д. Александрова

А. Д. Александрову принадлежит следующая фундаментальная в теории изгибания выпуклых поверхностей.

Теорема 1. *Пусть задано разбиение сферы* ω *на топологические многоугольники* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *и каждому многоугольнику* p_k *сопоставлена конечная выпуклая поверхность* F_k *с регулярной метрикой и кусочно гладким краем.*

---

*) Эту теорему можно доказать и без использования результата работы [7] с помощью «теоремы о склеивании», которая будет доказана в следующем параграфе.

Пусть установлено топологическое отображение границы каждого многоугольника p_k на границу соответствующей поверхности F_k, удовлетворяющее условиям:

1) *если точка X движется вдоль стороны какого-нибудь многоугольника p_i, то соответствующие ей точки на границах поверхностей F_k проходят одинаковые дуги;*

2) *если X — точка на стороне какого-нибудь многоугольника p_i и A_1, A_2 — соответствующие ей точки на границах поверхностей F_k, причём обе эти точки являются гладкими точками границ поверхностей, то сумма геодезических кривизн в точках A_1 и A_2 неотрицательна;*

3) *если среди точек $A_1, A_2, \ldots$, соответствующих точке X границы какого-нибудь многоугольника p_k, есть хотя бы одна угловая, то суммы углов при точках $A_1, A_2, \ldots$ на поверхностях F_k не превосходят 2π.*

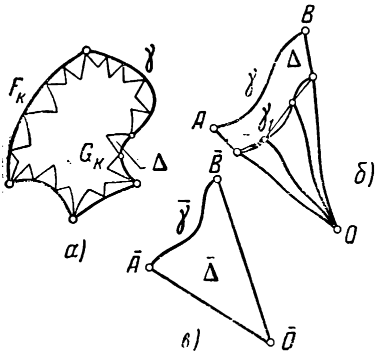
Тогда существует замкнутая выпуклая поверхность F, составленная из поверхностей изометричных F_k так же, как сфера ω составлена из топологических многоугольников p_k.

Поверхность F как бы склеена из поверхностей F_k, почему сама теорема и называется «теоремой о склеивании».

«Теорема о склеивании» является основной теоремой в теории изгибания выпуклых поверхностей. Она позволяет строить поверхности, изометричные данной, сводя эту задачу к более простой, в особенности, когда речь идёт о конкретной поверхности. Пусть, например, F — выпуклая регулярная шапочка. Покажем, что она изгибаема.

Возьмём треугольник Δ с тем же периметром, что и у границы шапочки F. Согласно теореме о склеивании, из треугольника Δ и шапочки F можно склеить замкнутую выпуклую поверхность Φ. Если вершина треугольника Δ соответствует гладкой точке границы шапочки F, то, очевидно, шапочке F на поверхности Φ соответствует изометричная, но не равная ей поверхность, что и доказывает изгибаемость шапочки. Ясно также, что шапочка допускает изгибания с большой степенью произвола.

Доказательство «теоремы о склеивании». Возьмём на границах многоугольников p_k достаточно густую сеть точек M, содержащую все вершины этих многоугольников, а также все точки их сторон, которым на поверхностях F_k соответствуют угловые точки границы. Обозначим через M_k множество точек на границе поверхности F_k, соответствующее точкам множества M. Построим геодезический многоугольник G_k на поверхности F_k так, чтобы его граница была близка к границе поверхности, а вершины, взятые через одну, находились в точках множества M_k (черт. 23, *а*).



Черт. 23.

Разобьём многоугольник G_k на геодезические треугольники и обозначим это разбиение T_0.

Построим последовательность разбиений T_1, T_2, T_3, ... многоугольника G_k следующим образом. T_1 получается из T_0 путём разбиения каждого треугольника из T_0 на четыре треугольника его средними линиями. Каждое из последующих разбиений получается из предыдущего так же, как T_1 из T_0.

Часть поверхности F_k, лежащая вне многоугольника G_k, состоит из областей, каждая из которых ограничена двумя геодезическими и гладким куском границы поверхности F_k; мы будем называть эти области секторами.

Рассмотрим один из таких секторов Δ (черт. 23, *б*). Пусть γ — часть границы сектора Δ, лежащая на границе поверхности F_k, и γ_1 — близкая к γ параллельная кривая. Впишем в кривую γ_1 геодезическую ломаную с малыми звеньями. Эта ломаная вместе со сторонами OA и OB сектора Δ ограничивает некоторый многоугольник. Разобьём его на геодезические треугольники диагоналями, выходящими из точки O. Каждому из этих треугольников сопоставим евклидовский треугольник с такими же сторонами и составим из них многоугольник на плоскости так же, как составлен геодезический многоугольник на поверхности из соответствующих геодезических треугольников.

Если кривую γ_1 приближать к γ, а звенья ломаной, вписанной в кривую γ_1, неограниченно уменьшать, то построенный нами многоугольник в пределе перейдёт в некоторый плоский сектор $\bar{\Delta}$ (черт. 23, *в*). Из способа образования сектора $\bar{\Delta}$ следует, что в точках кривых $\bar{\gamma}$ и γ, соответствующих одинаковым дугам, кривизна кривой $\bar{\gamma}$ не меньше геодезической кривизны кривой γ (лемма 1 § 2), а углы при вершинах A, B, O сектора Δ не меньше углов при соответствующих вершинах $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{O}$ сектора $\bar{\Delta}$.

Каждоме отрезку стороны топологического многоугольника p_k между двумя соседними точками множества M соответствуют два отрезка — один на границе поверхности F_k, например γ, другой на границе поверхности $F_{k'}$, обозначим его γ'. Дуге γ' соответствует на $F_{k'}$ сектор Δ', относительно которого мы будем говорить, что он соответствует сектору Δ. Построим плоский сектор $\bar{\Delta}'$ подобно тому, как был построен сектор $\bar{\Delta}$.

Заменим теперь дуги $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}'$ секторов $\bar{\Delta}$ и $\bar{\Delta}'$ ломаными c и c' равной длины так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) первое и последнее звенья имеют направления полукасательных к $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}'$ в соответствующих точках;

2) сумма внутренних углов ломаных c и c' в соответствующих вершинах, т. е. в вершинах, соответствующих равным дугам, не больше 2π.

Не останавливаясь пока на том, как построить ломаные c и c', закончим доказательство теоремы.

Заменив кривые $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}'$ ломаными c и c', разобьём полученные при этом плоские многоугольники $\bar{q}$ и $\bar{q}'$ на треугольники.

Разобьём теперь секторы Δ и Δ' на топологические треугольники, расположенные так же, как треугольники в разбиении многоугольников $\bar{q}$ и $\bar{q}'$. При этом каждая поверхность F_k будет разбита на геодезические треугольники, принадлежащие G_k, и топологические, принадлежащие $F_k - G_k$.

Построим разбиение многоугольника p_k на топологические треугольники, соответствующие разбиению поверхности F_k, и сопоставим каждому такому треугольнику δ эвклидовский треугольник δ' следующим образом:

1) если данному топологическому треугольнику δ соответствует на F_k геодезический треугольник из области G_k, то берём евклидовский треугольник δ' со сторонами, равными сторонам геодезического треугольника;

2) если данному топологическому треугольнику δ на F_k соответствует топологический треугольник из какого-нибудь сектора Δ, то мы берём соответствующий евклидовский треугольник δ' из многоугольника $\overline{q}$.

Согласно теореме А. Д. Александрова, приведённой в § 1 настоящей главы, существует замкнутый выпуклый многогранник P, составленный из геодезических треугольников δ'', изометричных евклидовским δ', так же, как сфера ω составлена из соответствующих топологических треугольников δ.

Если теперь, не меняя областей G_k на поверхностях F_k, брать всё более мелкие разбиения этих областей T_s, то, переходя к пределу по надлежащим образом выбранной подпоследовательности многогранников P при $s \to \infty$, получим замкнутую выпуклую поверхность Φ, на которой области, соответствующие многоугольникам G_k, будут им изометричны.

Уменьшая, наконец, сектора Δ и переходя к пределу по сходящейся подпоследовательности поверхностей Φ, получим замкнутую выпуклую поверхность, существование которой утверждается теоремой.

Покажем теперь, как построить ломаные c и c', удовлетворяющие условиям 1 и 2.

В соответствующих точках кривых $\overline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}'$ сумма кривизн неотрицательна. Может случиться, что она всюду равна нулю. В этом случае кривые $\overline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}'$ конгруентны, и построение ломаных c, c' не составляет труда. Для этого надо только расположить сектора $\overline{\Delta}$ и $\overline{\Delta}'$ так, чтобы кривые $\overline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}'$ совпали, а затем построить ломаную $c \equiv c'$, близкую к $\overline{\gamma} \equiv \overline{\gamma}'$, так, чтобы выполнялось условие 1.

Допустим теперь, что для соответствующих точек $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$ кривых $\overline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}'$ сумма кривизн положительна. Не ограничивая общности, при этом можно считать, что кривизна $\overline{\gamma}$ в точке $\overline{Q}$ больше нуля. В достаточно малой окрестности точки $\overline{Q}$ на кривой $\overline{\gamma}$ можно указать ещё две точки $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$, не лежащие на одной прямой с точкой $\overline{Q}$, обладающие упомянутыми свойствами точки Q.

Если кривая $\overline{\gamma}'$ — прямолинейный отрезок, то за ломаную c' мы возьмём этот отрезок, а вершины ломаной расставим тогда, когда будет построена ломаная c. Если же $\overline{\gamma}'$ не является прямолинейным отрезком, то на ней отметим три точки S_3, S_4, S_5, не лежащие на одной прямой.

Построим ломаную $\overline{c}'$ длины s, равной длине кривой $\overline{\gamma}'$, со звеньями, равными $\frac{s}{m}$, следующим образом. За начальную точку ломаной возьмём начальную точку кривой $\overline{\gamma}'$ и первое звено направим по полукасательной кривой $\overline{\gamma}'$ в начальной точке. Второе звено проведём под углом

$$\vartheta_1 = \int_0^{\frac{s}{m}} \varkappa'(s)\,ds$$

к первому звену, где $\varkappa'(s)$ — кривизна кривой $\overline{\gamma}'$ в точке, соответствующей дуге s. Вообще $(i+1)$-е звено проведём под углом

$$\vartheta_i = \int_{\frac{is}{m}}^{\frac{(i+1)s}{m}} \varkappa'(s)\,ds$$

к i-му звену.

Если m достаточно велико, т. е. если достаточно малы звенья ломаной $\overline{c}'$, конец ломаной $\overline{c}'$ будет достаточно близок к концу кривой $\overline{\gamma}'$, а направление последнего звена близко к направлению полукасательной к $\overline{\gamma}'$ в конечной точке. Отсюда следует, что при достаточно большом m сколь угодно малым изменением функции $\varkappa'(s)$ в малых окрестностях точек S_3, S_4, S_5 можно добиться того, что конец ломаной $\overline{c}'$ совпадет с концом кривой $\overline{\gamma}'$, а последнее звено её будет направлено вдоль полукасательной к $\overline{\gamma}'$ в конечной точке. Полученную ломаную обозначим c'.

Теперь строим ломаную $\bar{c}$, соответствующую кривой $\bar{\gamma}$, подобно тому как кривую c', предварительно изменив функцию $\varkappa(s)$ (кривизну кривой $\bar{\gamma}$) так, чтобы сумма $\varkappa(s) + \varkappa'(s)$ осталась без изменения. Варьируя теперь функцию $\varkappa(s)$ в малых окрестностях точек $\bar{Q}$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, добьёмся того, чтобы конец ломаной $\bar{c}$ совпал с концом кривой $\bar{\gamma}$, а направление последнего звена с направлением полукасательной к $\bar{\gamma}$. Полученную ломаную обозначим c.

Для ломаных c и c' свойство 1, очевидно, выполняется. Выполняется так же свойство 2. Действительно, это свойство наверное будет выполнено, если после модификации функций $\varkappa(s)$ и $\varkappa'(s)$ будет $\varkappa(s) + \varkappa'(s) \geqslant 0$. Это, действительно, имеет место всюду, кроме, быть может, малых окрестностей точек $\bar{Q}$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$. А так как в этих окрестностях до модификации функций $\varkappa$ и $\varkappa'$ сумма $\varkappa(s) + \varkappa'(s)$ была существенно положительна, то достаточно малые вариации функций $\varkappa$ и $\varkappa'$ не могут нарушить неравенства $\varkappa(s) + \varkappa'(s) > 0$ в окрестностях точек $\bar{Q}$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$. Таким образом, действительно, могут быть построены ломаные c и c', удовлетворяющие условиям 1 и 2.

Теорема доказана полностью.

ГЛАВА VII

ИЗГИБАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНОЙ

§ 1. Выпуклые поверхности с краем

Относительно поверхности F говорят, что она изгибаема, если существует изометричная, но не равная ей поверхность. При этом обычно предполагается, что поверхности, изометричные F, должны принадлежать некоторому классу. Так, например, когда идёт речь об изгибании регулярной поверхности F, требуется, чтобы изометричные F поверхности были тоже регулярны.

Оказывается, что регулярные выпуклые поверхности не допускают иных изгибаний, кроме регулярных, в классе общих выпуклых поверхностей. Именно, имеет место следующая

Теорема 1. *Если F — регулярная выпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной, то любая выпуклая поверхность, изометричная F, тоже регулярна. Более точно, если F дифференцируема k раз ($k \geqslant 6$), то поверхность, изометричная F, по крайней мере $k-2$ раза дифференцируема. Если же поверхность F — аналитическая, то поверхность, изометричная F, — аналитическая.*

Эта теорема является простым следствием теорем 1 и 2 § 3 гл. V, так как поверхность F, будучи k раз дифференцируемой (аналитической), имеет $k-1$ раз дифференцируемую (аналитическую) метрику, а потому выпуклая поверхность, изометричная F, должна быть по крайней мере $k-2$ раза дифференцируемой (соответственно аналитической).

Если существует непрерывно зависящее от параметра t семейство поверхностей F_t, изометричных F, содержащее данную поверхность F, причём среди поверхностей F_t есть не равные F, то говорят, что она допускает непрерывное изгибание.

Е. Е. Леви доказал, что каждая достаточно малая окрестность точки аналитической выпуклой поверхности с положительной гауссовой кривизной допускает непрерывные изгибания. Следует заметить, что условие положительности кривизны является существенным, ибо, как доказал Н. В. Ефимов [9], на выпуклой аналитической поверхности могут быть точки, окрестности которых не допускают изгибаний, как бы ни были малы эти окрестности (речь идёт, конечно, об изгибании в классе аналитических поверхностей).

Теорема 2. *Если F_1 и F_2 — две изометричные выпуклые одинаково ориентированные поверхности с положительной гауссовой кривизной, из коих хотя бы одна k раз дифференцируема ($k > 5$), то у каждой точки P_1 поверхности F_1 есть окрестность ω_1, которую непрерывным изгибанием с сохранением ($k-2$)-кратной дифференцируемости можно перевести в соответствующую область ω_2 поверхности F_2.*

Доказательство. Построим на F_1 малый геодезический треугольник Δ_1, содержащий точку P_1. Отметим на F_1 шапочку σ_1, которая содержит точку P_1 и сама содержится в треугольнике Δ_1. Пусть P_2 — точка, Δ_2 — треугольник на поверхности F_2, соответствующие по изометрии P_1 и Δ_1 соответственно. Построим шапочку σ_2 на F_2, содержащую P_2 и расположенную в Δ_2.

Покажем, что окрестность ω_1 точки P_1, содержащуюся в σ_1, образ которой ω_2 на F_2 содержится в σ_2, можно непрерывным изгибанием перевести в ω_2. В самом деле, представим себе три точки, выходящие из P_1, движущиеся непрерывно вдоль кратчайших к вершинам треугольника Δ_1 и одновременно достигающих эти вершины.

Пусть к моменту t они занимают положения $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ и $Q_3(t)$. Обозначим $\varkappa_1(t)$ минимальную выпуклую область на поверхности F_1, содержащую $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $Q_3(t)$ и σ_1. Область $\varkappa_1(t)$ изменяется непрерывно. Так как она выпуклая, то существует шапочка $\bar{\varkappa}(t)$, изометричная $\varkappa(t)$ (теорема 1 § 3 гл. VI). Из теоремы 1 § 1 гл. III следует, что шапочка $\bar{\varkappa}(t)$ изменяется непрерывно при непрерывном изменении t.

В начальный момент она совпадает с шапочкой σ_1, а в конечный — с шапочкой $\overline{\Delta}_1$, изометричной Δ_1. При каждом t на $\overline{\varkappa}_1(t)$ есть область, изометричная ω_1, которая при непрерывном изменении t подвергается непрерывному изгибанию.

Проделав то же для поверхности F_2, мы переведём непрерывным изгибанием область ω_2 в область на шапочке $\overline{\Delta}_2$, изометричной Δ_2. Но по теореме 1 § 1 гл. III шапочки $\overline{\Delta}_1$ и $\overline{\Delta}_2$ конгруентны, а поэтому конгруентны на них области ω_1 и ω_2, как соответствующие по изометрии. Для того чтобы доказать $(k-2)$-кратную дифференцируемость поверхности в любой момент изгибания, достаточно заметить, что метрика поверхностей F_1 и F_2 дифференцируема $k-1$ раз, а следовательно, все поверхности, её реализующие, дифференцируемы по крайней мере $k-2$ раза.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если из замкнутой регулярной выпуклой поверхности F с положительной гауссовой кривизной удалить область F_1, ограниченную кусочно-гладкой кривой, то оставшаяся часть F_2 поверхности F будет изгибаема* *).

Доказательство. Могут представиться два случая:

1) граница поверхности F_2 есть плоская кривая, и таким образом, поверхность F_2 отрезается от F плоскостью;

2) граница поверхности F_2 не лежит в одной плоскости.

Рассмотрим сначала второй, более общий случай.

Пусть Φ — минимальная выпуклая оболочка поверхности F_2 (так называют поверхность тела, полученного пересечением всех полупространств, содержащих поверхность F_2). Она состоит из поверхности F_2 и развёртывающейся поверхности Φ_1. Поверхность Φ_1 находится внутри тела, ограниченного поверхностью F.

Так как поверхность Φ_1 не лежит в одной плоскости, то на ней можно указать точку, через которую проходит только одна прямолинейная образующая g. Концы этой образующей лежат на границе поверхности F_2. Проведём через образующую g опорную плоскость α поверхности Φ_1 так, чтобы она с этой поверхностью не имела других общих точек, кроме

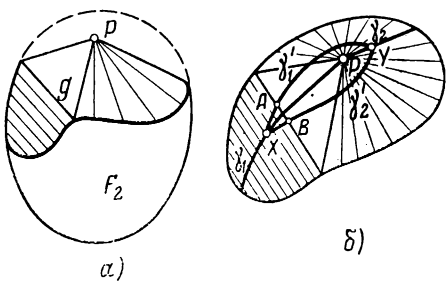
---

*) Эта теорема доказана А. С. Лейбиным [10] для случая общих выпуклых поверхностей.

точек образующей g. Пусть P — точка на плоскости α, близкая к q, лежащая внутри поверхности F.

Построим теперь минимальную выпуклую оболочку Φ' поверхности F_2 и точки P. Она состоит из поверхности F_2 и развёртывающейся поверхности Φ_1', на которой точка P будет конической точкой. Прямолинейная образующая g поверхности Φ является также прямолинейной образующей поверхности Φ_1' (черт. 24, *а*).

Проведём из точки P на поверхности Φ_1' две геодезические γ_1 и γ_2 так, чтобы они разбивали угол при вершине



Черт. 24.

конуса P на две равные части и чтобы одна из этих геодезических, например γ_1, пересекала прямолинейную образующую g под прямым углом (черт. 24, *б*). Возьмём на геодезических γ_1, γ_2 точки X и Y, как показано на чертеже, и соединим их кратчайшими γ_1' и γ_2'.

Если теперь удалить двуугольник, ограниченный кратчайшими γ_1', γ_2', и склеить участок границы γ_1' и γ_2', то получится замкнутая выпуклая поверхность, на которой будет область $\tilde{F}_2$, изометричная F_2. Легко видеть, что $\tilde{F}_2$ не равна F_2, так как при склеивании точки A и B совпадут, и, следовательно, пространственное расстояние между концами образующей g (они лежат на границе поверхности F_2) уменьшится.

Следует заметить, что мы применили операцию склеивания для более общих поверхностей, чем те, о которых идёт речь в теореме 1 § 4 гл. VI. Если же предварительно разрезать поверхность Φ' вдоль границы поверхности F_2 и геодезических γ_1, γ_2, то получение замкнутой выпуклой поверхности путём склеивания участка границы γ_1' с γ_2' и вдоль линий дополнительных разрезов гарантируется теоремой 1 § 4 гл. VI.

Рассмотрим теперь первый случай, т. е. тот случай, когда поверхность F_2 отрезается от F некоторой плоскостью. Пусть G — выпуклая область в этой плоскости, ограниченная кривой γ — границей поверхности F_2. Сумма геодезических кривизн кривой γ на поверхностях F_2 и G, очевидно, существенно положительна.

Подвергая кривую γ малой регулярной деформации, сохраняющей её дугу, получим кривую γ', кривизна которой мало отличается от кривизны кривой γ в соответствующих точках. Пусть G' — область, ограниченная кривой γ'. Если кривая γ' достаточно близка к кривой γ, то для поверхностей F_2 и G' выполнены условия теоремы о склеивании, и следовательно, существует замкнутая выпуклая поверхность, составленная из поверхностей $\widetilde{F}_2$ и $\widetilde{G}'$, изометричных F_2 и G' соответственно. Покажем, что $\widetilde{F}_2$ не равна F_2.

Действительно, у кривой γ' есть точка A', в которой кривизна её больше, чем кривизна γ в соответствующей точке A. Если взять на γ' близкую к ней точку B', то расстояние между ними меньше, чем расстояние между соответствующими точками A и B кривой γ. Отсюда следует, что пространственное расстояние между точками A и B границы поверхности F_2 больше пространственного расстояния между соответствующими точками границы поверхности $\widetilde{F}_2$, и, следовательно, $\widetilde{F}_2$ не равна F_2.

Теорема доказана полностью.

С помощью «теоремы о склеивании» можно доказать много других теорем об изгибании выпуклых поверхностей. Так, например, может быть доказана

Теорема 4. *Если выпуклая регулярная поверхность с положительной гауссовой кривизной ограничена кривой со всюду положительной или отрицательной геодезической кривизной, то она не только допускает изгибания, но непрерывным изгибанием может быть переведена в любую выпуклую поверхность, изометричную ей.*

§ 2. Замкнутые выпуклые поверхности

В 1836 г. Миндинг высказал гипотезу о том, что сфера неизгибаема. Удалось это доказать значительно позже Либману. Он доказал, что не только сфера, но любая аналитическая замкнутая выпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной не допускает непрерывных изгибаний. В 1927 г. С. Э. Кон-Фоссен доказал [11], что замкнутая трижды непрерывно дифференцируемая поверхность F с положительной гауссовой кривизной вообще не допускает изгибаний в том смысле, что каждая трижды непрерывно дифференцируемая поверхность, изометричная F, равна F. В 1943 г. Герглотц дал новое неожиданно простое доказательство теоремы Кон-Фоссена, ослабил несколько условие дифференцируемости поверхности и снял требование положительности гауссовой кривизны. А. Д. Александров, используя метод доказательства Герглотца, получил дальнейшее ослабление условий дифференцируемости поверхностей в теореме Кон-Фоссена.

В 1948 г. автор доказал [12], что замкнутые выпуклые поверхности ограниченной удельной кривизны неизгибаемы в классе выпуклых поверхностей. В частности, если F — регулярная замкнутая выпуклая поверхность и F_1 — выпуклая поверхность, изометричная F, то она равна F. Эта теорема имеет то преимущество над ей предшествующими, что относительно поверхности F_1 заранее не делается никаких предположений о её регулярности *).

Здесь мы ограничимся только доказательством следующей теоремы.

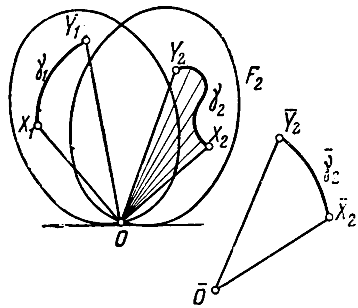
Теорема 1. *Замкнутые регулярные (в смысле шестикратной дифференцируемости) выпуклые поверхности с положительной гауссовой кривизной не допускают непрерывных изгибаний.*

Доказательство. Пусть F_1 — замкнутая регулярная выпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной.

---

*) В последнее время автор доказал неизгибаемость замкнутых выпуклых поверхностей в самых общих предположениях, именно: замкнутые выпуклые поверхности не допускают изгибаний в классе выпуклых поверхностей. Этот результат открывает новые возможности применения «теоремы о склеивании» к проблеме непрерывных изгибаний выпуклых поверхностей.

Предположим, что она допускает непрерывные изгибания. Тогда существует непрерывно зависящее от t семейство поверхностей $F(t)$, изометричных F_1, содержащее F при $t = t_0$, причём среди поверхностей $F(t)$ для значений t, сколь угодно близких к t_0, найдутся поверхности $F(t)$, не равные F_1. Среди таких поверхностей найдётся поверхность F_2 такая, что расстояния между соответствующими по изометрии точками поверхностей F_1 и F_2, углы между соответствующими по изометрии направлениями этих поверхностей и углы между нормалями в соответствующих точках не превосходят малого положительного числа ε.



Черт. 25.

Расположим поверхности F_1 и F_2 так, чтобы в начале координат O совпадали две соответствующие по изометрии точки поверхностей и соответствующие по изометрии направления, чтобы общая касательная плоскость поверхностей совпадала с плоскостью xy, а поверхности F_1 и F_2 находились бы в полупространстве $z \geqslant 0$.

Пусть $r_1(X)$ — радиус-вектор произвольной точки поверхности F_1, а $r_2(X)$ — радиус-вектор соответствующей по изометрии точки поверхности F_2.

Могут представиться две возможности:

1) для всех X $|r_1(X)| = |r_2(X)|$,

2) для некоторых X $|r_1(X)| \neq |r_2(X)|$.

Покажем, что если $|r_1(X)| = |r_2(X)|$ для всех X, то поверхности F_1 и F_2 совпадают. Действительно, проведём через две произвольные точки X_1 и Y_1 поверхности F_1 сечение плоскостью, проходящей через начало координат. В сечении получим плоскую выпуклую кривую, отрезок которой между точками X_1 и Y_1, не содержащий начала координат, обозначим γ_1. Кривой γ_1 по изометрии на поверхности F_2 соответствует кривая γ_2 (черт. 25).

Развернём на плоскость конус, проектирующий кривую γ_2 из начала координат. При этом кривая γ_2 перейдёт в плоскую кривую $\bar{\gamma}_2$, равную по длине γ_1. Так как расстояние между концами кривой $\bar{\gamma}_2$ не меньше расстояния между концами кривой γ_2, то пространственное расстояние между точками X_1 и Y_1 поверхности F_1 не меньше пространственного расстояния между соответствующими по изометрии точками X_2 и Y_2 поверхности F_2.

Поменяв ролями поверхности F_1 и F_2, приходим к обратному заключению. Отсюда следует, что пространственные расстояния между соответствующими по изометрии точками поверхностей F_1 и F_2 равны. Поэтому равны и поверхности. В нашем расположении они, очевидно, совпадают.

Рассмотрим второй случай. Пусть G — область на поверхности F_1, где $|\boldsymbol{r}_1(X)|$ не равно $|\boldsymbol{r}_2(X)|$, например, больше $|\boldsymbol{r}_2(X)|$. Рассмотрим поверхность, заданную векторным уравнением *)

$$\boldsymbol{r}(X)=\frac{\boldsymbol{r}_1(X)+\boldsymbol{r}_2(X)}{\boldsymbol{r}_1^2(X)-\boldsymbol{r}_2^2(X)}, \qquad X\subset G.$$

Поверхность Ф расположена в полупространстве $z>0$. Пусть $z=h$ — плоскость, разбивающая эту поверхность. Покажем, что часть поверхности Ф, расположенная под плоскостью $z=h$, конечна. Действительно, точка $\boldsymbol{r}(X)$ поверхности Ф удаляется в бесконечность только в том случае, если X приближается к границе G, где $\boldsymbol{r}_1^2(X)-\boldsymbol{r}_2^2(X)=0$. При этом, если точка X приближается к точке X_0, лежащей на границе G, и $X_0\neq 0$, то, очевидно, точка $\boldsymbol{r}(X)$ поверхности Ф неограниченно удаляется от плоскости xy. Покажем, что это будет и в том случае, если $X_0=0$. Действительно, расстояние точки $\boldsymbol{r}_1(X)+\boldsymbol{r}_2(X)$ от плоскости xy имеет порядок $s^2(X)$, где $s(X)$ — расстояние точки X от точки O, а $\boldsymbol{r}_1^2(X)-\boldsymbol{r}_2^2(X)$ имеет порядок не ниже $s^3(X)$. Поэтому расстояние точки $\boldsymbol{r}(X)$ от плоскости xy неограниченно растёт, когда X приближается к O.

Параболоид $z+a=x^2+y^2$ при достаточно большом a содержит внутри себя ту часть поверхности Ф, которая

*) Заметим, что поверхность Ф регулярна, так как вектор-функция $\boldsymbol{r}_1$ при надлежащем выборе координат дифференцируема шесть раз, а следовательно, $\boldsymbol{r}_2$ при том же выборе координат дифференцируема по крайней мере четыре раза (теорема 1 § 1 гл. VII).

лежит ниже плоскости $z=h$. Если этот параболоид аффинно сжимать относительно плоскости $z=h$, то в некоторый момент он коснётся поверхности Φ в точке $\boldsymbol{r}(X_0)$, лежащей под плоскостью $z=h$. Гауссова кривизна поверхности Φ в этой точке положительна. Покажем, что это невозможно.

В окрестности точки X_0 каждый из векторов $\boldsymbol{r}_i(X)$ $(i=1, 2)$ допускает следующее представление:

$$\boldsymbol{r}_i(X)=\boldsymbol{r}_i(X_0)+\boldsymbol{\tau}_i(X)\,s(X)+k_i(X)\,\boldsymbol{n}_i+O(s^3(X)),$$

где $s(X)$ — расстояние точки X от X_0, $\boldsymbol{\tau}_i(X)$ — единичный вектор касательной в точке X_0 к кратчайшей, соединяющей точки X и X_0, $k_i(X)$ — нормальная кривизна поверхности F_i в точке X_0 в направлении $\boldsymbol{\tau}_i(X)$, $\boldsymbol{n}_i$ — нормаль к поверхности F_i в точке X_0.

Исходя из этого представления векторов $\boldsymbol{r}_1(X)$ и $\boldsymbol{r}_2(X)$ для X, близких к X_0, будем иметь:

$$\boldsymbol{r}(X)-\boldsymbol{r}(X_0)=$$
$$=\boldsymbol{\alpha}(X)\,s(X)+\boldsymbol{\beta}(X)\,s^2(X)+\boldsymbol{\gamma}(X)+O(s^3(X)), \quad (1)$$

причём $\boldsymbol{\alpha}(X)$, $\boldsymbol{\beta}(X)$ и $\boldsymbol{\gamma}(X)$ соответственно равны:

$$\boldsymbol{\alpha}(X)=\varkappa\,[\boldsymbol{\tau}_1(X)+\boldsymbol{\tau}_2(X)-\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\tau}_1(X)-\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{\tau}_2(X))];$$
$$\boldsymbol{\beta}(X)=-2\varkappa\,[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\tau}_1(X)-\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{\tau}_2(X)]\,\boldsymbol{\alpha}(X);$$
$$\boldsymbol{\gamma}(X)=\varkappa\,[\boldsymbol{n}_1k_1(X)+\boldsymbol{n}_2k_2(X)-\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{a}_1k_1(X)-\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{a}_2k_2(X))],$$

где для краткости записи положено:

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{r}_1(X_0), \qquad \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{r}_2(X_0), \qquad \boldsymbol{a}=2\boldsymbol{r}(X_0), \quad \varkappa=\frac{1}{\boldsymbol{a}_1^2-\boldsymbol{a}_2^2}.$$

Умножая равенство (1) на единичный вектор нормали поверхности Φ в точке $\boldsymbol{r}(X_0)$, получим:

$$(\boldsymbol{r}(X)-\boldsymbol{r}(X_0))\,\boldsymbol{n}=(\lambda k_1(X)+\mu k_2(X))\,s^2(X)+O(s^3(X)), \quad (2)$$

где $\lambda=\varkappa\,(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}-(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n})(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{n}_1))$, $\mu=\varkappa\,(\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n})(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{n}_2))$.

Относительно коэффициентов λ и μ существенно заметить, что они определяются только нормалями $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}$ и векторами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}$.

Покажем, что $\lambda=-\mu\neq 0$. То, что λ и μ не могут обращаться в нуль одновременно, — ясно, в противном случае

$(\boldsymbol{r}(X)-\boldsymbol{r}(X_0))\,\boldsymbol{n}=O(s^3(X))$, что невозможно, так как гауссова кривизна поверхности Φ в точке $\boldsymbol{r}(X_0)$ положительна.

Пусть σ_1 и σ_2 — два одинаковых сферических сегмента, касающихся поверхностей F_1 и F_2 в точках $\boldsymbol{r}_1(X_0)$ и $\boldsymbol{r}_2(X_0)$ соответственно и обращённых выпуклостью так же, как поверхности F_1 и F_2. Установим между сегментами σ_1 и σ_2 изометрическое соответствие, которое порождается соответствием направлений в точках $\boldsymbol{r}_1(X_0)$ и $\boldsymbol{r}_2(X_0)$ так же, как и изометрическое соответствие поверхностей F_1, F_2.

Представим теперь себе сегменты σ_1 и σ_2 в роли поверхностей F_1 и F_2. Оказывается, в этом случае поверхность Φ есть плоскость и, следовательно, правая часть равенства (2) должна быть тождественно равна нулю. А так как для сегментов σ_1 и σ_2 имеем $k_1(X)=k_2(X)\neq 0$, то $\lambda=-\mu$.

Итак, чтобы доказать равенство $\lambda=-\mu$, достаточно показать, что поверхность Φ, соответствующая сегментам σ_1 и σ_2 в качестве поверхностей F_1 и F_2, есть плоскость.

Изометрическое отображение сегмента σ_1 на σ_2 можно продолжить в изометрическое отображение D всего пространства на себя. Это отображение будет, очевидно, движением пространства. Пусть $\bar{\boldsymbol{r}}_1(X)$ — вектор произвольной точки X пространства, а $\bar{\boldsymbol{r}}_2(X)$ — вектор точки $D(X)$. Покажем, что концы всех векторов

$$\bar{\boldsymbol{r}}(X)=\frac{\bar{\boldsymbol{r}}_1(X)+\bar{\boldsymbol{r}}_2(X)}{\bar{\boldsymbol{r}}_1^2(X)-\bar{\boldsymbol{r}}_2^2(X)}$$

лежат в одной плоскости.

Так как движение D пространства можно разложить на поворот около некоторой прямой g, проходящей через начало координат, и параллельный перенос, то нетрудно указать точку X_1, для которой вектор $\bar{\boldsymbol{r}}_1(X_1)+\bar{\boldsymbol{r}}_2(X_1)$ параллелен прямой g. Положим

$$\bar{\boldsymbol{r}}_1(X)=\boldsymbol{\alpha}_1+\tilde{\boldsymbol{r}}_1(X),\qquad \bar{\boldsymbol{r}}_2(X)=\boldsymbol{\alpha}_2+\tilde{\boldsymbol{r}}_2(X),$$

где $\boldsymbol{\alpha}_1=\bar{\boldsymbol{r}}_1(X_1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\bar{\boldsymbol{r}}_2(X_1)$.

Очевидно, вектор $\tilde{\boldsymbol{r}}_2(X)$ получается из $\tilde{\boldsymbol{r}}_1(X)$ поворотом около прямой g, поэтому вектор $\tilde{\boldsymbol{r}}_1(X)-\tilde{\boldsymbol{r}}_2(X)$ перпендикулярен к g. Имеем:

$$\bar{\boldsymbol{r}}(X)=\frac{\tilde{\boldsymbol{r}}_1(X)+\tilde{\boldsymbol{r}}_2(X)+\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2}{\boldsymbol{\alpha}_1^2-\boldsymbol{\alpha}_2^2+2(\boldsymbol{\alpha}_1\tilde{\boldsymbol{r}}_1(X)-\boldsymbol{\alpha}_2\tilde{\boldsymbol{r}}_2(X))}.$$

Умножая вектор $\bar{\boldsymbol{r}}(X)$ скалярно на вектор $(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$, получим:

$$\bar{\boldsymbol{r}}(X)(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=$$
$$=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1^2-\boldsymbol{\alpha}_2^2+(\boldsymbol{\alpha}_1\tilde{\boldsymbol{r}}_1(X)-\boldsymbol{\alpha}_2\tilde{\boldsymbol{r}}_2(X))+(\boldsymbol{\alpha}_1\tilde{\boldsymbol{r}}_2(X)-\boldsymbol{\alpha}_2\tilde{\boldsymbol{r}}_1(X))}{\boldsymbol{\alpha}_1^2-\boldsymbol{\alpha}_2^2+2(\boldsymbol{\alpha}_1\tilde{\boldsymbol{r}}_1(X)-\boldsymbol{\alpha}_2\tilde{\boldsymbol{r}}_2(X))}.$$

Так как вектор $\tilde{\boldsymbol{r}}_1(X)-\tilde{\boldsymbol{r}}_2(X)$ перпендикулярен к g, то

$$(\tilde{\boldsymbol{r}}_1(X)-\tilde{\boldsymbol{r}}_2(X))(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=0.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{\alpha}_1\tilde{\boldsymbol{r}}_1(X)-\boldsymbol{\alpha}_2\tilde{\boldsymbol{r}}_2(X)=\boldsymbol{\alpha}_1\tilde{\boldsymbol{r}}_2(X)-\boldsymbol{\alpha}_2\tilde{\boldsymbol{r}}_1(X).$$

Следовательно,

$$\bar{\boldsymbol{r}}(X)(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=1.$$

А это значит, что концы всех векторов $\bar{\boldsymbol{r}}(X)$ лежат в одной плоскости, в которой, в частности, лежит и поверхность Φ, соответствующая сегментам σ_1, σ_2.

Обратимся теперь снова к равенству (2). Теперь оно может быть переписано так:

$$(\boldsymbol{r}(X)-\boldsymbol{r}(X_0))\,\boldsymbol{n}=\lambda\,(k_1(X)-k_2(X))\,s^2(X)+O(s^3(X)).$$

Так как поверхность Φ в точке $\boldsymbol{r}(X_0)$ не может иметь с касательной плоскостью более тесного соприкосновения, чем параболоид, то коэффициент при $s^2(X)$ не может обращаться в нуль. А это значит, что либо для всех соответствующих по изометрии направлений $k_1(X)-k_2(X)>0$, либо для всех соответствующих по изометрии направлений $k_1(X)-k_2(X)<0$. Но ни то, ни другое невозможно, так как в первом случае гауссова кривизна поверхности F_1 в точке $\boldsymbol{r}_1(X_0)$ больше, чем в соответствующей по изометрии точке $\boldsymbol{r}_2(X_0)$ поверхности F_2, а во втором — меньше.

Мы пришли к противоречию. Следовательно, для поверхностей F_1 и F_2 должно быть $|r_1(X)| = |r_2(X)|$ тождественно. Но тогда поверхность F_2 конгруентна F_1, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

§ 3. Бесконечные выпуклые поверхности, полная кривизна которых равна 2π

Лучшие результаты, касающиеся изгибания бесконечных выпуклых поверхностей, принадлежат С. П. Оловянишникову. О них будет речь итти в следующем параграфе. В этом же параграфе мы докажем неизгибаемость широкого класса бесконечных выпуклых поверхностей с полной кривизной 2π.

Теорема 1. *Пусть $z = f(x, y)$ — бесконечная полная выпуклая поверхность с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной. Пусть, далее, l_n — длина кривой пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $z = n$, φ_n — полная кривизна той части поверхности, которая лежит над плоскостью $z = n$.*

Тогда, если $l_n \varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$, то поверхность $z = f(x, y)$ не допускает изгибаний. Более того, каждая выпуклая поверхность, изометричная F, равна F *).

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда существует бесконечная выпуклая поверхность F_1, удовлетворяющая условиям теоремы, и выпуклая поверхность F_2, изометричная F_1, но не равная ей.

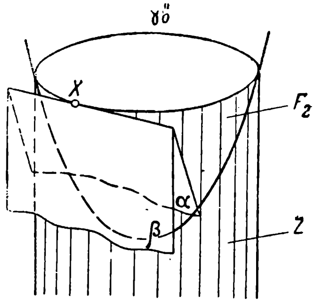
Пусть γ_n' — линия пересечения плоскости $z = n$ с поверхностью F_1 и γ_n'' — соответствующая по изометрии кривая на поверхности F_2. Покажем, что кривая γ_n'' лежит между двумя близкими плоскостями, параллельными плоскости xy, расстояние между которыми стремится к нулю при $n \to \infty$. Действительно, проведём цилиндр Z, проектирующий кривую γ_n'' в направлении оси z. Пусть $\varkappa$ — геодезическая кривизна кри-

---

*) Эта теорема верна и без предположения о регулярности метрики поверхности. Достаточно потребовать ограниченность удельной кривизны [12]. Повидимому, среди условий теоремы существенно только то, что полная кривизна поверхности равна 2π.

вой γ_n'' на цилиндре, которую мы будем считать положительной, если кривая γ_n'' обращена выпуклостью в сторону $z>0$, а $\varkappa'$ — геодезическая кривизна кривой γ_n'' на поверхности F_2.

Проведём касательные плоскости в произвольной точке X кривой γ_n'' к поверхности F_2 и цилиндру Z. Каждую из этих плоскостей прямая, касательная к γ_n'' в точке X, разбивает на две полуплоскости. Обозначим те из них, к которым прилегают конечная часть поверхности F_2, ограниченная кривой γ_n'', и часть цилиндра Z, идущая от кривой γ_n'' вниз, α и β соответственно (черт. 26); тогда, если обозначить через φ и ψ углы, образуемые главной нормалью кривой γ_n'' в точке X с полуплоскостями α и β, и через k кривизну кривой γ_n'', то геодезические кривизны γ_n'' в точке X на поверхностях F_2 и Z соответственно равны



Черт. 26.

$$\varkappa' = k\cos\varphi, \quad \varkappa = k\cos\psi.$$

Так как k и $\varkappa'$ положительны, то $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Далее, $\varphi < \psi < \frac{3\pi}{2}$. Поэтому $\varkappa < \varkappa'$.

Так как

$$\int\limits_{\gamma_n''} \varkappa'\, ds = \varphi_n, \quad \int\limits_{\gamma_n''} \varkappa\, ds = 0, \quad \varkappa < \varkappa', \quad \varkappa' > 0,$$

то

$$\int\limits_{\gamma_n''} |\varkappa|\, ds \leqslant 2\varphi_n.$$

Возьмём за начало отсчёта дуг вдоль кривой γ_n'' точку, наиболее удалённую от плоскости xy. Тогда превышение точки X_1 кривой γ_n'', соответствующей дуге s_1, над точкой X_2, соответствующей дуге s_2, не превосходит

$$\int_{s_1}^{s_2} |\sin\vartheta|\, ds,$$

где ϑ — угол, образуемый касательной к кривой γ_n'' с плоскостью xy. И так как

$$|\vartheta| = \left|\int_0^s \varkappa\, ds\right| \leqslant \int_0^{l_n} |\varkappa|\, ds < 2\varphi_n,$$

то превышение точки X_1 над точкой X_2 не превосходит

$$|s_2 - s_1|\, 2\varphi_n < 2\varphi_n l_n.$$

Отсюда следует, что кривая γ_n'' находится между двумя параллельными плоскостями, удалёнными друг от друга на расстояние, не превосходящее $2\varphi_n l_n$.

Совместим параллельным сдвигом поверхности F_1 и F_2 точками O_1 и O_2, соответствующими по изометрии. Пусть $z_2(X)$ — расстояние точки X поверхности F_2 от плоскости xy, а $z_1(X)$ — расстояние от плоскости xy соответствующей по изометрии точки поверхности F_1.

Положим

$$m_k = \max_{X \subset \sigma_k''} |z_1(X) - z_2(X)|, \qquad n_k = \max_{X, Y \subset \gamma_k''} |z_2(X) - z_2(Y)|,$$

где σ_k'' — конечная область поверхности F_2, ограниченная кривой γ_k''.

Могут быть только два предположения: либо $m_k = 0$ для всех k, либо, начиная с некоторого $k = k_0$, $m_k > \varepsilon > 0$.

Если $m_k = 0$ для всех k, то $z_1(X) = z_2(X)$ тождественно, и поверхности F_1, F_2 равны (см. доказательство теоремы 1 § 1 гл. III).

Допустим, что для достаточно больших k имеет место неравенство $m_k > \varepsilon > 0$. Так как $n_k \to 0$ при $k \to \infty$, то найдутся такие k, для которых $m_k > n_k$. Поэтому поверхности F_1 можно сдвинуть в направлении оси z так, что максимум

$|z_1(X) - z_2(X)|$ для $X \subset G_k''$ не будет достигаться на γ_k'', но это противоречит лемме 3 § 1 гл. III.

Теорема доказана.

Недостатком теоремы 1 является то, что в ней содержится внешнее требование, наложенное на поверхность F_1. Нижеследующая теорема свободна от этого требования.

Теорема 2. *Пусть F — бесконечная выпуклая поверхность с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной; P — фиксированная точка на этой поверхности; $K(R)$ — геодезический круг на поверхности F с центром P и радиусом R, $\psi(R)$ — полная кривизна круга $K(R)$, $l(R)$ — длина наименьшей кривой на поверхности, охватывающей круг $K(R)$.*

Тогда, если $(2\pi - \psi(R))\, l(R) \to 0$, когда $R \to \infty$, то каждая выпуклая поверхность F_1, изометричная F, равна F.

Доказательство. Расположим поверхность F над плоскостью xy так, чтобы она однозначно проектировалась на эту плоскость. Проведём две плоскости α_1 и α_2, параллельные плоскости xy, упирающиеся в окружность геодезического круга $K(R)$ сверху и снизу соответственно. Пусть h_1 и h_2 — расстояния плоскостей α_1 и α_2 от точки P, l_1 и l_2 — длины кривых γ_1 и γ_2, по которым плоскости α_1 и α_2 пересекают поверхность F.

Имеют место следующие два неравенства: $h_1 < R$, $h_2 > R - l_2 - 2a$, где a — расстояние от точки P до горизонтальной касательной плоскости поверхности F. Первое из этих неравенств очевидно, второе легко получается применением теоремы 1 § 2 гл. I.

Пусть ψ_1 — полная кривизна шапочки, отрезаемой плоскостью α_1 от поверхности F. Покажем, что $(2\pi - \psi_1)\, l_1 \to 0$, когда $R \to \infty$. Для этого покажем прежде всего, что выполняется неравенство: $l_1 \geqslant l(R) \geqslant l_2$. Первая часть этого неравенства очевидна, так как кривая γ_1 охватывает круг $K(R)$, а $l(R)$ — длина минимальной кривой, охватывающей этот круг. Легко видеть, что имеет место и вторая часть неравенства. Действительно, пусть γ — кривая наименьшей длины, охватывающая круг $K(R)$, $\bar{\gamma}$ — её проекция на плоскость α_2. Кривая $\bar{\gamma}$ охватывает кривую γ_2, поэтому её длина не меньше l_2. Но длина кривой γ не меньше длины $\bar{\gamma}$. Поэтому $l(R) \geqslant l_2$.

Так как круг $K(R)$ лежит под плоскостью α_1, то $\psi(R) \leqslant \psi_1$. Далее, мы показали, что $l_2 \leqslant l(R)$. Поэтому $(2\pi - \psi_1) l_2 \to 0$ при $R \to \infty$.

Спроектируем кривую γ_2 на плоскость α_1 из точки P. При этом мы получим кривую $\bar{\gamma}_2$ в плоскости α_1, охватывающую кривую γ_1. Из подобия кривых $\bar{\gamma}_2$ и γ_2 и полученных выше оценок для h_1 и h_2 легко заключаем, что длина кривой $\bar{\gamma}_2$ не больше $\frac{l_2 R}{R - l_2 - 2a}$. Но кривая $\bar{\gamma}_2$ охватывает кривую γ_1. Поэтому $l_1 < \frac{l_2 R}{R - l_2 - 2a}$. Так как $\frac{l_2}{R} \to 0$ при $R \to \infty$ *), то $(2\pi - \psi_1) l_1 \to 0$ при $R \to \infty$. После этого достаточно применить теорему 1.

§ 4. Бесконечные выпуклые поверхности, полная кривизна которых меньше 2π

Пусть F — бесконечная выпуклая поверхность, O — любая её точка и F_n — поверхность, полученная из F преобразованием подобия относительно точки O с коэффициентом подобия $\frac{1}{n}$. При $n \to \infty$ F_n сходится к конической поверхности $K(F)$, ограничивающей конус, образованный полупрямыми, исходящими из O и целиком принадлежащими выпуклому телу, ограниченному поверхностью F. Конус $K(F)$ определён поверхностью F однозначно с точностью до параллельного переноса (зависящего от выбора точки O) и вырождается (в полупрямую) в том и только в том случае, когда полная кривизна поверхности F равна 2π. Конус $K(F)$ называется предельным конусом поверхности F.

Кривая γ на бесконечной выпуклой поверхности F называется лучом, если она обладает следующими свойствами:

*) Если бы отношение $\frac{l_2}{R}$ не стремилось к нулю при $R \to \infty$, то внутри поверхности F из точки P можно было бы провести полупрямую, не пересекающую поверхность, кроме полупрямой, лежащей на положительной полуоси z. Но тогда сферическое изображение поверхности F не покрывает полусферу, а вместе с тем является выпуклой областью, и, следовательно, имеет площадь, меньшую 2π.

1) γ имеет начальную точку, от которой вдоль γ можно отложить произвольно большую длину s;

2) длина всякой дуги кривой γ равна расстоянию на F между концами дуги.

Оказывается, что направление касательной к кривой γ при $s \to \infty$ сходится к направлению одной из образующих предельного конуса поверхности. Эта образующая называется предельной образующей для луча γ.

Понятие предельного конуса, луча и его предельной образующей введены С. П. Оловянишниковым в работе [13]. Там же содержится его теорема об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей. Эта теорема гласит:

Пусть F — бесконечная выпуклая поверхность и γ — луч на F. Если K — произвольная выпуклая коническая поверхность с той же полной кривизной, что и F, а t — любая её образующая, то найдётся выпуклая поверхность F^*, изометричная F, одинаково с ней ориентированная и такая, что K будет предельным конусом для F^*, а t — предельной образующей для γ^* (где γ^* — образ γ на F^*).

Автор в работе [12] доказал, что бесконечные выпуклые поверхности ограниченной удельной кривизны*) с полной кривизной меньше 2π (в частности, поверхности с регулярной метрикой и положительной кривизной) при фиксированных данных С. П. Оловянишникова определяются их метрикой однозначно с точностью до параллельного переноса. Именно, доказана следующая

Теорема 1. *Пусть F_1 и F_2 — две бесконечные выпуклые, с полной кривизной меньше 2π, изометричные, одинаково ориентированные поверхности с ограниченной удельной кривизной, имеющие общий гладкий предельный конус K, и образующая t этого конуса является предельной образующей для двух соответствующих по изометрии лучей γ_1 и γ_2 поверхностей F_1 и F_2.*

Тогда поверхности F_1 и F_2 равны и параллельно расположены, т. е. могут быть совмещены параллельным переносом.

---

*) Ограниченность удельной кривизны для бесконечной выпуклой поверхности понимается как ограниченность удельной кривизны в любой ее конечной части.

С помощью этой теоремы и теоремы С. П. Оловянишникова мы докажем сейчас теорему о непрерывных изгибаниях бесконечных выпуклых поверхностей.

Теорема 2. *Пусть F_1 и F_2 — две бесконечные, регулярные, с положительной гауссовой кривизной, изометричные, одинаково ориентированные выпуклые поверхности с полной кривизной меньше 2π, K_1 и K_2 — их гладкие предельные конусы, t_1 и t_2 — предельные образующие для двух соответствующих по изометрии лучей γ_1 и γ_2.*

Тогда существует непрерывное изгибание поверхности F_1 в поверхность F_2.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что каждую из поверхностей F_1 и F_2 можно непрерывным изгибанием перевести в поверхность с круговым предельным конусом. Построим такое изгибание, например, для поверхности F_1. Введём прямоугольные декартовы координаты так, чтобы начало координат O находилось в вершине конуса K_1, — предельного конуса поверхности F_1, положительная полуось z проходила внутри конуса K_1, весь конус — в полупространстве $z > 0$.

Проведём плоскость $z = 1$. Она пересекает конус по выпуклой кривой $\varkappa_1$. Построим параллельную ей кривую на расстоянии λ от неё, а затем эту кривую уменьшим подобно относительно центра, лежащего на оси z в плоскости $z = 1$ так, чтобы конус с вершиной O, проведённый через эту кривую, имел ту же кривизну, что и K_1. Обозначим этот конус $K_{1\lambda}$. При $\lambda \to \infty$ конус $K_{1\lambda}$ сходится к прямому круговому конусу с осью z.

Отметим на каждом конусе $K_{1\lambda}$ образующую, которая получается в сечении конуса $K_{1\lambda}$ полуплоскостью, выходящей из оси z и содержащей предельную образующую луча γ_1. Так отмеченную образующую на конусе $K_{1\lambda}$ обозначим $t_{1\lambda}$.

По теореме С. П. Оловянишникова существует поверхность $F_{1\lambda}$, изометричная F_1, одинаково с ней ориентированная, имеющая конус $K_{1\lambda}$ в качестве предельного конуса, его образующую $t_{1\lambda}$ — как предельную образующую луча $\gamma_{1\lambda}$, соответствующего по изометрии лучу γ_1, точку O — как начальную точку луча $\gamma_{1\lambda}$.

Из теоремы 1 следует, что поверхность $F_{1\lambda}$ изменяется непрерывно при непрерывном изменении λ. При $\lambda \to \infty$

она переходит в поверхность с круговым предельным конусом.

Если поверхность F_1 регулярна в смысле шестикратной дифференцируемости, то все поверхности $F_{1\lambda}$ тоже регулярны (теорема 1 § 1 гл. VII) в смысле четырёхкратной дифференцируемости. Таким образом, существует регулярное изгибание поверхности F_1 в поверхность F_2.

Теорема доказана.

В заключение докажем следующую теорему об изгибании выпуклых шапочек.

Теорема 3. *Пусть F — регулярная выпуклая шапочка с кривизной ω, G — любая выпуклая область на единичной сфере с площадью, равной ω.*

Тогда непрерывным изгибанием шапочку F можно перевести в выпуклую поверхность, для которой область G будет её сферическим изображением.

Доказательство. Касательные плоскости шапочки F огибают некоторую бесконечную выпуклую поверхность Φ с полной кривизной ω. Эта поверхность состоит из шапочки F и некоторой развёртывающейся поверхности.

По теореме 2 поверхность Φ можно непрерывным изгибанием перевести в поверхность Φ' с предельным конусом, имеющим сферическое изображение G.

Область на поверхности Φ', изометричная шапочке F, и будет поверхностью, существование которой утверждается теоремой.

ДОПОЛНЕНИЕ I

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим уравнение

$$Ar + 2Bs + Ct = Dz, \tag{1}$$

относительно которого будем предполагать следующее:

1) коэффициенты A, B, C, D суть аналитические функции x и y в круге ω $(x^2 + y^2 \leqslant a^2)$;

2) в упомянутом круге $AC - B^2 > 0$ (условие эллиптичности), $A > 0$ и $D > 0$.

С. Н. Бернштейн доказал, что в предположениях 1) и 2) краевая задача для уравнения (1) всегда разрешима для любой аналитической функции, заданной в качестве граничных значений решения. Более полно: если $\varphi(s)$ — любая аналитическая функция дуги окружности круга ω, то всегда существует и притом аналитическая в круге ω функция $z(x, y)$, удовлетворяющая в упомянутом круге уравнению (1) и принимающая на его окружности значения $\varphi(s)$ *).

Эту теорему С. Н. Бернштейн получает из общего предложения, доказанного им для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа, благодаря возможности получения в данном случае априорных оценок для максимума модуля решения и его производных первого порядка. В ходе изложения нам понадобится не только факт существования решения краевой

---

*) Эту теорему, а также другие теоремы С. Н. Бернштейна, которые цитируются в этом дополнении, читатель может найти в [6].

задачи уравнения (1), но и возможность получения указанных выше оценок. В связи с этим мы воспроизведём известное рассуждение С. Н. Бернштейна, делая незначительные отступления в сторону упрощения, что оказывается возможным благодаря частному характеру рассматриваемого уравнения.

Начнём с оценки максимума модуля решения $z(x, y)$. Покажем, что этот максимум не превосходит максимума модуля функции $\varphi(s)$, заданной на границе круга ω. Действительно, допустим, что это неверно. Тогда максимум модуля функции $z(x, y)$ достигается в некоторой внутренней точке P круга ω. В этой точке для функции z выполняются обычные условия:

$$\frac{\partial(z^2)}{\partial x}=\frac{\partial(z^2)}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2(z^2)}{\partial x^2}\leqslant 0, \quad \frac{\partial^2(z^2)}{\partial y^2}\leqslant 0,$$

$$\frac{\partial^2(z^2)}{\partial x^2}\frac{\partial^2(z^2)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2(z^2)}{\partial x\,\partial y}\right)^2\geqslant 0.$$

В силу условия 2, которому удовлетворяют коэффициенты уравнения (1), форма

$$A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2$$

положительно определённая. Поэтому выражение

$$A(z^2)_{xx}+2B(z^2)_{xy}+C(z^2)_{yy}=z(Ar+2Bs+Ct)\leqslant 0.$$

Отсюда следует, что z в точке P равно нулю, так как $Ar+2Bs+Ct=Dz$, а $D>0$. Таким образом, действительно, максимум модуля решения $z(x, y)$ в круге ω не превосходит максимума модуля функции $\varphi(s)$.

Оценим теперь верхнюю грань модулей p и q — первых производных решения $z(x, y)$. Следуя С. Н. Бернштейну, получим такие оценки сначала на границе круга ω.

Так как производная z по дуге окружности круга ω ограничена максимумом модуля первой производной функции $\varphi(s)$, то нам достаточно оценить верхнюю грань модуля производной z по радиусу круга. Найдём, например, оценку сверху для этой производной (оценка снизу получается аналогично). Для этого введём в уравнение (1) функцию $u(x, y)$, связанную с $z(x, y)$ равенством

$$z=-n+\ln u,$$

где n — максимум модуля z в круге ω. Уравнение (1) при этом принимает вид:

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=$$
$$=\frac{1}{u}(Au_x^2+2Bu_xu_y+Cu_y^2)+D(-n+\ln u). \qquad (2)$$

Получение оценки для z_ρ — производной функции z по радиусу круга ω — равносильно получению оценки для u_ρ.

Так как A, C, $AC-B^2$ в круге ω имеют положительную нижнюю грань, а $u>0$ и ограничено (поскольку ограничен модуль z), то при достаточно большом m для любых значений u_x и u_y, удовлетворяющих неравенству

$$u_x^2+u_y^2>m,$$

правая часть уравнения (2) положительна. Далее, легко указать такое m_1, что если $u_\rho>m_1$, то $u_x^2+u_y^2>m$.

Обозначим через γ кривую на поверхности, заданной уравнением $z=u(x, y)$, которая проектируется в ограничивающую круг ω окружность. Проведём в произвольной точке S кривой γ касательную плоскость к ней. Пусть $z=v(x, y)$ — её уравнение, v_ρ — производная функции $v(x, y)$ вдоль радиуса, идущего в проекцию точки S. Из геометрических соображений ясно, что существует число $m_2>0$, зависящее только от максимума модуля функции $\varphi(s)$ и её производных до второго порядка, такое, что если $v_\rho>m_2$, то вся кривая γ располагается ниже построенной плоскости, кроме точки S, которая лежит на ней.

Теперь легко видеть, что $u_\rho<2(m_1+m_2)$. В самом деле, допустим, что в точке, которая служит проекцией точки S, $u_\rho\geqslant 2(m_1+m_2)$. Строим в точке S касательную плоскость, для которой $2(m_1+m_2)>v_\rho>m_1+m_2$. Она разбивает поверхность $z=u(x, y)$, причём весь край поверхности находится снизу. Поэтому существует параллельная ей плоскость, касающаяся поверхности в некоторой точке, причём вся поверхность располагается ниже этой плоскости. Пусть P — проекция точки касания на плоскость xy. В точке P левая часть уравнения (2) неположительная, так как $u_{xx}\leqslant 0$, $u_{yy}\leqslant 0$, $u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2\geqslant 0$, в то время как правая часть больше нуля, потому что $u_x^2+u_y^2>m$.

Итак, для верхней грани модулей производных решения $z(x, y)$ уравнения (1) на границе круга ω может быть указан верхний предел в зависимости только от верхней грани модулей коэффициентов уравнения (1), верхней грани модуля функции $\varphi(s)$ и её производных до второго порядка, нижней грани A, C и $AC-B^2$ в круге ω.

Теперь, когда получены оценки для модулей первых производных функции z на границе круга ω, нетрудно получить их и во всём круге. Для этого рассмотрим выражение

$$w = p^2 + q^2.$$

Если максимум w достигается на границе круга ω, то способ получения оценок для p и q ясен.

Допустим, что максимум w достигается в точке P внутри круга и больше нуля. Не ограничивая общности, можно считать, что в этой точке $p=0$, так как выражение w инвариантно относительно поворота системы координат, а надлежащим поворотом её можно всегда добиться, что p в данной точке будет равно нулю. Далее, в точке P $w_x = w_y = 0$, и так как $p=0$, то это даёт $s=t=0$. Наконец,

$$Aw_{xx} + 2Bw_{xy} + Cw_{yy} = q\,(Aq_{xx} + 2Bq_{xy} + Cq_{yy}) \leqslant 0.$$

Разделив уравнение (1) на A и дифференцируя его по y, будем иметь в точке P

$$q_{xx} + \frac{2B}{A}\,q_{xy} + \frac{C}{A}\,q_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Dz}{A}\right).$$

Или:

$$q\,(Aq_{xx} + 2Bq_{xy} + Cq_{yy}) = Dq^2 + Aqz\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{D}{A}\right).$$

Отсюда следует, что в точке P величина $w=q^2$ не превосходит

$$z^2\,\frac{A^2}{D^2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{D}{A}\right)\right)^2.$$

Таким образом, для уравнения (1) в круге ω может быть указан верхний предел модулей производных первого порядка решения $z(x, y)$ в зависимости только от верхней грани модулей коэффициентов уравнения, их производных первого порядка, нижней грани A, C, $AC-B^2$, верхней грани модуля функции $\varphi(s)$ и её производных до второго порядка.

В ходе доказательства теоремы о регулярности решений уравнений эллиптического типа нам понадобятся некоторые свойства функций, удовлетворяющих условию Гёльдера. Чтобы не прерывать этого доказательства, мы сначала рассмотрим эти свойства.

Пусть в области G задана функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (коротко — $f(x)$). Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α $(0 < \alpha < 1)$, если для любой пары точек x и y в области G выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha,$$

где $|x - y|$ — расстояние между точками x и y, а C — постоянная, которую называют постоянной Гёльдера.

В дальнейших построениях выбор области G будет находиться в нашем распоряжении. Поэтому мы ограничимся рассмотрением случая, когда эта область есть n-мерный шар.

Если функция $f(x)$, заданная в n-мерном шаре, имеет всюду равномерно ограниченные первые производные по всем аргументам, то она в этом шаре удовлетворяет условию Гёльдера с любым положительным показателем, меньшим единицы.

Действительно,

$$f(x) - f(y) = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) - \\ - f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k, \ldots, y_n)\}.$$

Отсюда

$$|f(x) - f(y)| \leqslant nM|x - y| \leqslant nMd^{1-\alpha}|x - y|^\alpha,$$

где M — верхняя грань модулей первых производных функции f, а d — диаметр шара.

Утверждение доказано.

Пусть $f(x)$ — функция, заданная в n-мерном шаре $|x| \leqslant \leqslant a\sqrt{n}$ с равномерно ограниченными и непрерывными производными первого порядка. Пусть, далее, $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots \ldots, \varphi_n(\xi)$ — n функций, заданных в двумерной области G, ограниченных по модулю постоянной a и удовлетворяющих в этой области условию Гёльдера с показателем α и постоянной Гёльдера C.

Тогда функция $\bar{f}(\xi)=f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ в области G удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и постоянной Гёльдера, зависящей только от C и верхней грани M модулей производных функции f по x_k $(k=1, \ldots, n)$.

В самом деле, подобно предыдущему, легко получаем неравенство

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M \sum_k |x_k - y_k|.$$

Далее,

$$|\varphi_k(\xi)-\varphi_k(\eta)| \leqslant C|\xi-\eta|^\alpha.$$

Отсюда

$$|\bar{f}(\xi)-\bar{f}(\eta)| \leqslant nMC|\xi-\eta|^\alpha.$$

Утверждение доказано.

Лемма. *Пусть в n-мерном шаре ω_1 $(|x| \leqslant a)$ задана m раз дифференцируемая функция $f(x)$, m-е производные которой удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α и постоянной Гёльдера C. Пусть, далее, $\bar{\omega}$ — шар с тем же центром, что и ω_1, но с радиусом $\frac{a}{2}$. Тогда существует последовательность аналитических функций $f_k(x)$, сходящихся равномерно с их производными до m-го порядка в шаре $\bar{\omega}$ к функции $f(x)$, причём m-е производные функций $f_k(x)$ удовлетворяют в шаре $\bar{\omega}$ условию Гёльдера с показателем α и постоянной Гёльдера, не зависящей от k.*

Доказательство. Положим

$$p_k(x, y)=\begin{cases} \lambda_k\left(1-\dfrac{4|x-y|^2}{a^2}\right)^k, & \text{если } |x-y| \leqslant \dfrac{a}{2}; \\ 0, & \text{если } |x-y| \geqslant \dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

Здесь λ_k — постоянная, определяемая из условия

$$\int_{\omega_1} p_k(x, y)\,dy=1 \quad (dy=dy_1 dy_2 \ldots dy_n)$$

при $x \subset \bar{\omega}$.

Функция $p_k(x, y)$ при $|x-y| \leqslant \frac{a}{2}$ есть, очевидно, многочлен степени $2k$.

Построим теперь $m+1$ раз дифференцируемую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условиям:

а) $\varphi(x)=1$ внутри шара $\bar{\omega}$,

б) $\varphi(x)=0$ вне шара ω_1.

Очевидно, построение такой функции не составляет труда. Положим

$$\bar{f}(x)=f(x)\varphi(x).$$

Функция $\bar{f}(x)$ внутри шара $\bar{\omega}$ совпадает с функцией $f(x)$. Поэтому наше утверждение достаточно доказать для неё.

Рассмотрим последовательность аналитических функций

$$f_k(x)=\int_{\omega_1}\bar{f}(y)p_k(x, y)\,dy.$$

Из непрерывности функции $\bar{f}(x)$ следует равномерная сходимость функций $f_k(x)$ к $f(x)$ в области $\bar{\omega}$.

Вычислим производную $f_k(x)$ по x_l:

$$\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_l}=\lim_{\Delta x_l\to 0}\frac{1}{\Delta x_l}\left[\int_{\omega_1}\bar{f}(y)p_k(x+\Delta x, y)\,dy-\right.$$

$$\left.-\int_{\omega_1}\bar{f}(y)p_k(x, y)\,dy\right],$$

где

$$\Delta x=(0, \ldots, \Delta x_l, \ldots, 0).$$

Сделаем замену переменных в первом интеграле, полагая $y'=y+\Delta x$. Тогда выражение под знаком предела примет вид

$$\frac{1}{\Delta x_l}\left(\int_{\omega_2}\bar{f}(y+\Delta x)p_k(x, y)\,dy-\int_{\omega_1}\bar{f}(y)p_k(x, y)\,dy\right),$$

где ω_2 — новая область интегрирования, т. е. шар ω_1, смещённый на Δx.

Последнее выражение удобно представить в следующей форме:

$$\frac{1}{\Delta x_l}\left\{\int\limits_{\omega_2^1}\bar{f}(y+\Delta x)\,p_k(x,y)\,dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\omega_{12}}[\bar{f}(y+\Delta x)-\bar{f}(y)]\,p_k(x,y)\,dy+\int\limits_{\omega_1^2}\bar{f}(y)\,p_k(x,y)\,dy\right\}.$$

Здесь области интегрирования ω_2^1, ω_{12} и ω_1^2 имеют следующие значения: ω_2^1 — часть шара ω_2, лежащая вне шара ω_1, ω_1^2 — часть шара ω_1, лежащая вне шара ω_2, наконец, ω_{12} — общая часть шаров ω_1 и ω_2. Из трёх интегралов первый и последний равны нулю, так как $\bar{f}(y+\Delta x)=0$ в ω_2^1, а $\bar{f}(y)=0$ в ω_1^2. Поэтому

$$\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_l}=\lim_{\Delta x_l\to 0}\frac{1}{\Delta x_l}\left\{\int\limits_{\omega_{12}}[\bar{f}(y+\Delta x)-\bar{f}(y)]\,p_k(x,y)\,dy\right\}=$$

$$=\int\limits_{\omega_1}\frac{\partial\bar{f}(y)}{\partial y_l}\,p_k(x,y)\,dy.$$

Из непрерывности производных $\frac{\partial\bar{f}(x)}{\partial x_l}$ следует равномерная сходимость $\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_l}$ к $\frac{\partial\bar{f}(x)}{\partial x_l}$, т. е. к $\frac{\partial f(x)}{\partial x_l}$ в области $\bar{\omega}$. Применяя то же рассуждение к первым производным, устанавливаем равномерную сходимость вторых производных и т. д. до производных m-го порядка.

То, что m-е производные функций $f_k(x)$ в $\bar{\omega}$ удовлетворяют условию Гёльдера, с показателем α и постоянной Гёльдера, не зависящей от k, устанавливается также легко. Пусть, например, $f_k^{(m)}(x)$ — какая-нибудь m-я производная функции $f_k(x)$. Тогда, подобно тому как для первых производных, имеем:

$$f_k^{(m)}(x)=\int\limits_{\omega_1}\bar{f}^{(m)}(y)\,p_k(x,y)\,dy.$$

Далее,

$$f_k^{(m)}(x+\Delta x)-f_k^{(m)}(x)=$$
$$=\int_{\omega_{12}}(\bar{f}^{(m)}(y+\Delta x)-\bar{f}^{(m)}(y))\,p_k(x, y)\,dy.$$

Отсюда

$$|f_k^{(m)}(x+\Delta x)-f_k^{(m)}(x)|\leqslant C|\Delta x|^{\alpha}.$$

Утверждение доказано полностью.

Переходим к изложению основного результата.

Теорема 1. *Пусть $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$ — уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа, $z(x, y)$ — его трижды непрерывно дифференцируемое решение в области G.*

Тогда, если функция F дифференцируема n раз по всем аргументам, то функция $z(x, y)$ в области G дифференцируема по крайней мере $n+1$ раз.

Доказательство. Введём в рассмотрение уравнение

$$A\zeta_{xx}+2B\zeta_{xy}+C\zeta_{yy}=D\zeta, \tag{3}$$

где

$$A=F_r,\quad 2B=F_s,\quad C=F_t,$$
$$D=\frac{2\lambda(F_r+F_t)-rF_p-sF_q-pF_z-F_x}{\mu+p+\lambda(x^2+y^2)}$$

и постоянные λ, μ выбраны так, что в малом круге ω, целиком лежащем в области G, выполняются неравенства

$$2\lambda(F_r+F_t)-rF_p-sF_q-pF_z-F_x>0,$$
$$\mu+p+\lambda(x^2+y^2)>0.$$

A, B, C, D — известные функции от x и y в том смысле, что после формального их выражения через производные F мы подставляем $z(x, y)$ (решение уравнения $F=0$) и его производные p, q, r, s, t.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция

$$\zeta=\mu+p+\lambda(x^2+y^2)$$

удовлетворяет уравнению (3).

Пусть ω^* — круг, концентричный кругу ω, в два раза большего радиуса. Если радиус круга ω мал, то круг ω^* целиком лежит в области G. Поэтому можно считать, что коэффициенты уравнения (3) имеют непрерывные и равномерно ограниченные первые производные в круге ω^*.

Способом, указанным выше, построим последовательность аналитических функций A_n, B_n, C_n, D_n, p_n. Из них первые четыре сходятся равномерно в круге ω к A, B, C, D соответственно вместе с их производными первого порядка, а функция p_n сходится равномерно в этом круге к p вместе с производными второго порядка.

Рассмотрим уравнение

$$\overline{A}_n\zeta_{xx} + 2\overline{B}_n\zeta_{xy} + \overline{C}_n\zeta_{yy} = \overline{D}_n\zeta, \tag{4}$$

где

$$\overline{A}_n = \frac{A_n}{\Delta_n}, \ldots, \quad \overline{D}_n = \frac{D_n}{\Delta_n}, \quad \Delta_n = \sqrt{A_nC_n - B_n^2}.$$

При достаточно больших n имеем $A_nC_n - B_n^2 > 0$ и $D_n > 0$.

Поэтому по цитированной теореме С. Н. Бернштейна существует аналитическое решение ζ_n уравнения (4), принимающее на границе круга ω значения $\mu + p_n + \lambda(x^2 + y^2)$.

Далее, из предложения об оценках максимума модуля решения уравнения (4) и первых производных этого решения следует существование не зависящих от n оценок для $|\zeta_n|$ $\left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial x}\right|$ и $\left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial y}\right|$ в круге ω. В самом деле, такие оценки могут быть получены в зависимости только от верхней грани модулей коэффициентов уравнения (4), их производных первого порядка, верхней грани модулей величин $\frac{1}{\overline{A}_n}$, $\frac{1}{\overline{C}_n}$, верхней грани модуля функции p_n и её производных второго порядка. Из свойств сходимости функций $A_n, \ldots, D_n$, p_n следует, что для всех упомянутых величин, начиная с некоторого n, может быть указан верхний предел, не зависящий от n.

Для линейных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа имеет место следующая теорема Шаудера [14].

Пусть в ограниченной области G переменных x_1, x_2 рассматривается линейное уравнение в частных производных эллиптического типа:

$$a_{11}(x_1,x_2)\,u_{x_1x_1}+2a_{12}(x_1,x_2)\,u_{x_1x_2}+a_{22}(x_1,x_2)\,u_{x_2x_2}=f(x_1,x_2),$$

причём $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=1$. Пусть, далее, в замкнутой области $\overline{G}$ коэффициенты уравнения a_{ij} и его правая часть удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\alpha+\varepsilon$ $(0<\alpha<1,\ \varepsilon>0)$ и постоянной Гёльдера M.

Тогда, если вторые производные решения $u(x, y)$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, то для верхней грани модулей производных $u(x, y)$ первого и второго порядка в области B, которая вместе с границей содержится в G, и для наименьших постоянных Гёльдера вторых производных функции $u(x, y)$ в области B относительно показателя α может быть указан верхний предел в зависимости только от M, максимума модуля $u(x, y)$ в G и расстоянии области B от границы области G.

Применяя к уравнению (4) теорему Шаудера, заключаем, что внутри круга ω_1, содержащегося внутри круга ω, модули вторых производных решения ζ_n равномерно (по x, y и n) ограничены, и эти производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α $(0<\alpha<1)$ в круге ω_1 с постоянной Гёльдера, не зависящей от n. Действительно, оценки для упомянутых величин зависят только от постоянной Гёльдера для коэффициентов $\overline{A}_n$, $\overline{B}_n$, $\overline{C}_n$ правой части уравнения, т. е. ζ_n, $\overline{D}_n$, и максимума модуля решения ζ_n в круге ω. Но для постоянной Гёльдера может быть указано число, годное для всех n, а оценка верхнего предела ζ_n, не зависящая от n, получена ранее.

Последовательность функций ζ_n равностепенно непрерывна в круге ω, а их производные второго порядка в круге ω_1 удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α и постоянной Гёльдера C, не зависящей от n. Поэтому можно выбрать сходящуюся подпоследовательность функций ζ_{n_k}. Предельная функция $\overline{\zeta}$ этой подпоследовательности будет дважды дифференцируемой во всем круге (кроме, быть может, его границы) и в любом круге ω_1, целиком содержащемся в ω, а её вторые производные будут удовлетворять условию Гёльдера с показателем α. Кроме того, функция $\bar{\zeta}$ будет удовлетворять предельному уравнению, т. е. уравнению (3), и следовательно, в силу единственности решения уравнения (3)

$$\bar{\zeta} = \mu + p + \lambda (x^2 + y^2).$$

Отсюда мы делаем важный вывод, что третьи производные $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ решения уравнения $F=0$ в круге ω_1 удовлетворяют условию Гёльдера с любым положительным показателем, меньшим единицы. В силу равноправия переменных x и y таким же свойством обладает производная $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

Итак, использовав пока только двукратную дифференцируемость функции F и трёхкратную дифференцируемость решения $z(x, y)$, мы показали, что третьи производные решения в круге ω_1 удовлетворяют условию Гёльдера с любым положительным показателем, меньшим единицы. Это даёт нам право утверждать, что функции A_n, B_n, C_n, D_n в круге ω_1 не только обладают непрерывными производными, но что эти производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α и постоянной Гёльдера, не зависящей от n.

Продифференцируем уравнение (4) по x или по y. Дифференцируя, например, по y, получим:

$$\bar{A}_n \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \zeta_n}{\partial y}\right) + 2\bar{B}_n \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \zeta_n}{\partial y}\right) + \bar{C}_n \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \zeta_n}{\partial y}\right) = f_n.$$

Применяя к этому уравнению теорему Шаудера, заключаем, подобно предыдущему, что функция $z(x, y)$ имеет в круге ω_2, содержащемся в круге ω_1, четвёртые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера.

Итак, использовав трёхкратную дифференцируемость функции F, мы доказали четырёхкратную дифференцируемость решения $z(x, y)$. Доказательство существования производных пятого и последующих порядков функции $z(x, y)$ проводится так же, как и для производных четвёртого порядка.

Теорема доказана.

ДОПОЛНЕНИЕ II

ОБ ОЦЕНКАХ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Теорема 1. *Пусть*

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \tag{1}$$

— уравнение в частных производных эллиптического типа и $z=z(x, y)$ — его регулярное решение в области G плоскости xy.

Тогда для модулей третьих производных функции z в точке (x, y) области G могут быть получены оценки в зависимости только от верхней грани модулей функции z и её производных до второго порядка, верхней грани модулей частных производных функции F до третьего порядка, верхней грани модулей величин

$$\frac{1}{F_r}, \quad \frac{1}{F_t}, \quad \frac{1}{F_rF_t-\frac{1}{4}F_s^2}$$

и расстояния точки (x, y) от границы области G *).

Доказательство. Дифференцируя уравнение (1) по x, получим:

$$F_rr_x+F_ss_x+F_tt_x=M_1. \tag{2}$$

Дифференцируя уравнение (2) ещё раз по X, получим

$$F_rr_{xx}+F_ss_{xx}+F_tt_{xx}=M_2, \tag{3}$$

*) Предполагается, что после формального вычисления производных функции F вместо z, p, q, r, s, t подставляется решение $z(x, y)$ и его производные, а тогда вычисляются верхние грани модулей указанных величин.

где M_2 представляет собой многочлен второй степени относительно третьих производных r_x, s_x и t_x, коэффициенты которого не содержат производных функции z выше второго порядка. Подставим вместо третьей производной t_x в M_2 её выражение через r_x и s_x из (2), тогда M_2 превращается в многочлен не выше второй степени относительно третьих производных r_x и s_x с коэффициентами, не содержащими производных функции z выше второго порядка.

Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_5$ — производные функции z по x и y до второго порядка, $N_1, N_2, \ldots, N_k$ — все производные функции F по её аргументам до третьего порядка. Тогда для удобства изложения выражения вида

$$\sum \frac{n_1^{\alpha_1} \ldots n_5^{\alpha_5} \cdot N_1^{\beta_1} \ldots N_k^{\beta_k}}{F_r^{\lambda} F_t^{\mu} \left(F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2\right)^{\nu}}, \qquad (\omega)$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$; $\beta_1, \ldots, \beta_k$; λ, μ, ν — любые целые неотрицательные числа, будем называть «выражениями типа (ω)».

Положим

$$r = -M + \alpha \ln \ln u,$$

где M — верхняя грань модуля второй производной r. Тогда из уравнения (3) получим

$$Ar_1 + 2Bs_1 + Ct_1 = \\ = \frac{1 + \ln u}{u \ln u}(Ap_1^2 + 2Bp_1q_1 + Cq_1^2) + \frac{\alpha}{u \ln u} P_2 + P_1 + \\ + \frac{u \ln u}{\alpha} P_0 = Q_1, \qquad (4)$$

где p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 — обозначения для первых и вторых производных функции $u(x, y)$, $A = F_r$, $2B = F_s$, $C = F_t$, а P_2, P_1, P_0 — многочлены соответственно второй, первой и нулевой степени относительно p_1 и q_1 с коэффициентами типа (ω).

Следуя С. Н. Бернштейну, рассмотрим теперь функцию $w(x, y)$, определяемую равенством

$$w = Ap_1^2 + 2Bp_1q_1 + Cq_1^2.$$

Допустим, что в некоторой точке (x_0, y_0) эта функция достигает максимума. Тогда в этой точке

$$w_x = 0, \quad w_y = 0. \tag{5}$$

Решая эти уравнения совместно с уравнением (4) относительно r_1, s_1, t_1, получим

$$r_1 = \frac{1}{w\Delta}\left\{w\,(Bp_1 + Cq_1)^2 \frac{1+\ln u}{u\ln u} + \frac{\alpha g_1}{u\ln u} + h_1 + \frac{l_1 u \ln u}{\alpha}\right\};$$

$$s_1 = -\frac{1}{w\Delta}\left\{w\,(Bp_1 + Cq_1)(Ap_1 + Bq_1)\frac{1+\ln u}{u\ln u} + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha g_2}{u\ln u} + h_2 + \frac{l_2 u\ln u}{\alpha}\right\};$$

$$t_1 = \frac{1}{w\Delta}\left\{w\,(Ap_1 + Bq_1)^2 \frac{1+\ln u}{u\ln u} + \frac{\alpha g_3}{u\ln u} + h_3 + \frac{l_3 u\ln u}{\alpha}\right\},$$

где $\Delta = AC - B^2$; g_1, g_2, g_3 — многочлены не выше четвёртой степени относительно p_1, q_1; h_1, h_2, h_3 — не выше третьей степени, l_1, l_2, l_3 — не выше второй степени с коэффициентами типа (ω).

Рассмотрим выражение

$$K(w) = \frac{1}{2}\,(Aw_{xx} + 2Bw_{xy} + Cw_{yy}).$$

Если предположить, что $A > 0$, а этого всегда можно добиться, умножая исходное уравнение (1) на -1, то в точке, где w достигает максимума, $K(w) \leqslant 0$, так как форма

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$$

положительно определённая, а форма

$$w_{xx}\xi^2 + 2w_{xy}\xi\eta + w_{yy}\eta^2$$

не принимает положительных значений. Подставляя в $K(w)$ $w = Ap_1^2 + 2Bp_1q_1 + Cq_1^2$, находим:

$$K(w) = (Ap_1 + Bq_1)(Ap_{1xx} + 2Bp_{1xy} + Cp_{1yy}) +$$
$$+ (Bp_1 + Cq_1)(Aq_{1xx} + 2Bq_{1xy} + Cq_{1yy}) +$$
$$+ A\,(Ar_1^2 + 2Br_1s_1 + Cs_1^2) +$$
$$+ 2B\,(Ar_1s_1 + B\,(r_1t_1 + s_1^2) + Cs_1t_1) +$$
$$+ C\,(As_1^2 + 2Bs_1t_1 + Ct_1^2) + H_1 + H_2 +$$
$$+ \frac{\alpha}{u\ln u}H_3 + \alpha\frac{1+\ln u}{(u\ln u)^2}H_4 + \frac{\alpha'}{(u\ln u)^2}H_5,$$

где H_1 — многочлен первой степени относительно p_1r_1, p_1s_1, p_1t_1, q_1r_1, q_1s_1, q_1t_1; H_2 — многочлен второй степени относительно p_1, q_1; H_3 — многочлен первой степени относительно $p_1^2r_1$, $p_1^2s_1$, $p_1^2t_1$, $p_1q_1r_1$, $p_1q_1s_1$, $p_1q_1t_1$, $q_1^2r_1$, $q_1^2s_1$, $q_1^2t_1$ и, наконец, H_4 и H_5 — многочлены четвёртой степени относительно p_1, q_1. Коэффициенты всех многочленов суть выражения типа (ω).

Дифференцируя уравнение (4) по x, получим:

$$Ap_{1xx}+2Bp_{1xy}+Cp_{1yy}=$$
$$=-\frac{1+\ln u+(\ln u)^2}{(u\ln u)^2}p_1w+\frac{\alpha(1+\ln u)}{(u\ln u)^2}G_1+\frac{\alpha}{u\ln u}G_2+$$
$$+\frac{\alpha^2}{u\ln u}G_3+G_4+\frac{u\ln u}{\alpha}G_5+\frac{1+\ln u}{u\ln u}G_6,$$

где G_1 и G_3 — многочлены третьей степени, G_5 — первой степени относительно p_1, q_1; G_2 — многочлен первой степени относительно p_1r_1, p_1s_1, p_1t_1, q_1r_1, q_1s_1, q_1t_1, p_1^2, p_1q_1, q_1^2; G_4 — многочлен первой степени относительно r_1, s_1, t_1, p_1, q_1; наконец, G_6 — многочлен второй степени относительно p_1 и q_1 и все с коэффициентами типа (ω).

Точно так же, дифференцируя уравнение (4) по y, получим

$$Aq_{1xx}+2Bq_{1xy}+Cq_{1yy}=$$
$$=-\frac{1+\ln u+(\ln u)^2}{(u\ln u)^2}q_1w+\frac{\alpha(1+\ln u)}{(u\ln u)^2}G_{(1)}+\frac{\alpha}{u\ln u}G_{(2)}+$$
$$+\frac{\alpha^2}{(u\ln u)^2}G_{(3)}+G_{(4)}+\frac{u\ln u}{\alpha}G_{(5)}+\frac{1+\ln u}{u\ln u}G_{(6)},$$

где $G_{(1)}$, $G_{(2)}$, ..., $G_{(6)}$ — многочлены, обладающие свойствами, аналогичными свойствам многочленов G_1, G_2, ..., G_6.

Обращаясь теперь к выражению $K(w)$ и подставляя найденные выражения для $Ap_{1xx}+2Bp_{1xy}+Cp_{1yy}$ и $Aq_{1xx}+$ $+2Bq_{1xy}+Cq_{1yy}$, получим:

$$w^2K(w)=-\frac{1+\ln u+(\ln u)^2}{(u\ln u)^2}w^4+\left(\frac{1+\ln u}{u\ln u}\right)^2w^4+$$
$$+\alpha\frac{1+\ln u}{(u\ln u)^2}+P_6w+\frac{\alpha^2}{(u\ln u)^2}P_8+\frac{1+\ln u}{u\ln u}P_7+\frac{\alpha}{u\ln u}P_7'+$$
$$+\frac{u\ln u}{\alpha}P_6'+P_6''+\left(\frac{u\ln u}{\alpha}\right)P_4,$$

где через P_k, P'_k и P''_k обозначены многочлены степени k относительно p_1, q_1 с коэффициентами типа (ω).

Совокупность членов восьмой степени относительно p_1 и q_1 в $w^2K(w)$ задаётся выражением

$$T_8 = \frac{w^4}{u^2 \ln u} + \alpha \frac{1 + \ln u}{(u \ln u)^2} P_6 w + \frac{\alpha^2}{(u \ln u)^2} P_8.$$

Так как $\ln u > 1$, то можно указать достаточно малое число α такое, чтобы при $|p| + |q| > 1$ было

$$T_8 > \frac{1}{2} \frac{w^4}{u^2 \ln u}.$$

Пусть α выбрано именно таким образом.

Тогда, если $|p| + |q| < 1$, то

$$w = Ap_1^2 + 2Bp_1q_1 + Cq_1^2$$

не может превзойти максимума $|A| + 2|B| + |C|$. Если же $|p| + |q| > 1$, то

$$w^2K(w) > \frac{1}{2} \frac{w^4}{u^2 \ln u} + T_7.$$

И так как $K(w) \leqslant 0$, то не представляет труда указать число w_0, которого w в точке (x_0, y_0) не может превзойти.

Теперь, когда получена оценка для w, получение оценок для третьих производных r_x и s_x не составляет труда, так как

$$w = \alpha^2 e^{2\left(\frac{r+M}{\alpha}\right)} e^{2e^{\left(\frac{r+M}{\alpha}\right)}} (Ar_x^2 + 2Br_x s_x + Cs_x^2).$$

Аналогично могут быть получены оценки для третьих производных s_y и t_y.

При получении оценки максимума функции w мы предполагали, что этот максимум достигается внутри области G при достаточно малых значениях параметра α.

Оценим теперь величину w в некоторой внутренней точке области G, удалённой на расстояние ε от её границы без предположения о том, что максимум w достигается внутри области G.

Не ограничивая общности, можно считать, что точка, в которой желательно получить оценку для w, есть начало координат.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{w} = \lambda w,$$

где $\lambda = (\varepsilon^2 - x^2 - y^2)$, а w — введённая раньше вспомогательная функция С. Н. Бернштейна. В круге ω_ε $(x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2)$ функция $\tilde{w}$ неотрицательна, обращается в нуль на окружности круга и, следовательно, достигает максимума в некоторой внутренней точке P круга ω_ε. В точке P

$$\tilde{w}_x = w_x \lambda + w \lambda_x = 0; \qquad \tilde{w}_y = w_y \lambda + w \lambda_y = 0.$$

Отсюда

$$w_x = -\frac{\lambda_x}{\lambda} w; \qquad w_y = -\frac{\lambda_y}{\lambda} w.$$

Далее, в той же точке P по известной причине

$$K(\tilde{w}) = \frac{1}{2}(A\tilde{w}_{xx} + 2B\tilde{w}_{xy} + C\tilde{w}_{yy}) \leqslant 0.$$

Преобразуем $K(\tilde{w})$:

$$K(\tilde{w}) = \frac{1}{2}\lambda(Aw_{xx} + 2Bw_{xy} + Cw_{yy}) +$$
$$+ \frac{1}{2} w (A\lambda_{xx} + 2B\lambda_{xy} + C\lambda_{yy}) +$$
$$+ (A\lambda_x w_x + B(\lambda_x w_y + \lambda_y w_x) + C\lambda_y w_y).$$

Заменяя w_x и w_y найденными их выражениями в точке P и замечая, что $\left|\frac{1}{\lambda}\lambda_x^2\right|$, $\left|\frac{1}{\lambda}\lambda_x\lambda_y\right|$, $\left|\frac{1}{\lambda}\lambda_y^2\right|$ ограничены, получим

$$K(\tilde{w}) = \lambda K(w) + wL,$$

где L — некоторая функция, модуль которой не может превзойти некоторого числа L_0, зависящего от верхней грани модулей коэффициентов A, B, C.

Так как $K(\tilde{w}) \leqslant 0$ в точке P, то в этой точке

$$K(w) - \frac{wL_0}{\lambda} \leqslant 0.$$

Найдём вторые производные r_1, s_1, t_1 функции u в точке P, где $\tilde{w}$ достигает максимума, из системы

$$Ar_1 + 2Bs_1 + Ct_1 = Q_1;$$

$$w_x = -\frac{\lambda_x}{\lambda} w; \quad w_y = -\frac{\lambda_y}{\lambda} w.$$

Если правые части двух последних уравнений заменить нулями, то мы приходим к рассмотренной выше системе (4), (5). Поэтому решения этой системы можно представить в виде

$$r_1 = \beta_1 + n_1, \quad s_1 = \beta_2 + n_2, \quad t_1 = \beta_3 + n_3,$$

где β_1, β_2, β_3 — решение системы (4), (5), а n_1, n_2, n_3 — решение системы

$$Ar_1 + 2Bs_1 + Ct_1 = 0,$$

$$r_1 (Ap_1 + Bq_1) + s_1 (Bp_1 + Cq_1) = -\frac{\lambda_x w}{2\lambda},$$

$$s_1 (Ap_1 + Bq_1) + t_1 (Bp_1 + Cq_1) = -\frac{\lambda_y w}{2\lambda}.$$

Решения этой системы имеют вид

$$n_1 = \frac{\lambda_x k_1 + \lambda_y l_1}{\lambda},$$

$$n_2 = \frac{\lambda_x k_2 + \lambda_y l_2}{\lambda},$$

$$n_3 = \frac{\lambda_x k_3 + \lambda_y l_3}{\lambda},$$

где k_1, l_1, k_2, l_2, k_3, l_3 — линейные выражения относительно p_1, q_1 с известными ограниченными коэффициентами.

Положим

$$K(w) = K_b(w) + K_n(w),$$

где $K_b(w)$ — значение $K(w)$, если в качестве r_1, s_1, t_1 взять β_1, β_2, β_3, а $K_n(w)$ — добавка к $K_b(w)$, которая вызвана тем, что r_1, s_1, t_1 равны $\beta_1 + n_1$, $\beta_2 + n_2$, $\beta_3 + n_3$ соответственно.

Все члены $K(w)$, содержащиеся в $K_n(w)$, входят в выражение

$$(Ap_1+Bq_1)\left(\frac{\alpha G_2}{u\ln u}+G_4\right)+(Bp_1+Cq_1)\left(\frac{\alpha G_{(2)}}{u\ln u}+C_{(4)}\right)+$$
$$+A(Ar_1^2+2Br_1s_1+Cs_1^2)+2B(Ar_1s_1+B(r_1t_1+s_1^2)+Cs_1t_1)+$$
$$+C(As_1^2+2Bs_1t_1+Ct_1^2)+H_1+\frac{\alpha H_3}{u\ln u}.$$

Если теперь заметить, что β_1, β_2, β_3 при больших w имеют порядок w, а n_1, n_2, n_3 имеют порядок не выше $\frac{1}{\lambda}\sqrt{w}(|\lambda_x|+|\lambda_y|)$, то нетрудно заключить, что при больших w

$$|K_n(w)|<N\left\{\frac{w^{\frac{3}{2}}}{\lambda}(|\lambda_x|+|\lambda_y|)+\frac{w}{\lambda^2}(\lambda_x^2+\lambda_y^2)\right\},$$

где N — некоторая постоянная, зависящая только от верхней грани модулей производных z до второго порядка, верхней грани модулей производных F до третьего порядка, верхней грани $\frac{1}{F_r}$, $\frac{1}{F_t}$, $\frac{1}{F_rF_t-\frac{1}{4}F_s^2}$ в области G.

Взяв достаточно малым число α, при достаточно больших w будем иметь

$$K_b(w)>\frac{1}{4}\frac{w^2}{u^2\ln u}.$$

Но

$$K(w)-\frac{L_0w}{\lambda}<0,$$

поэтому при больших w

$$\frac{1}{4}\frac{w^2}{u^2\ln u}-N\left(\frac{w^{\frac{3}{2}}}{\lambda}(|\lambda_x|+|\lambda_y|)+\frac{w}{\lambda^2}(\lambda_x^2+\lambda_y^2)\right)-\frac{wL_0}{\lambda}<0.$$

Откуда следует, что существует достаточно большое число R_0, зависящее только от верхней грани модулей производных F и z в области G такое, что w в точке P не превосходит

$$w_0=\frac{R}{\lambda}.$$

Следовательно, в круге ω_ε, в частности в его центре, $\tilde{w} \leqslant R_0$. Таким образом, для w в точке области G, удалённой на расстояние ε от её границы, получается оценка

$$w \leqslant \frac{R_0}{\varepsilon^4},$$

причём R_0 зависит только от верхней грани модулей производных функций z и F до второго и соответственно третьего порядков и верхней грани модулей величин $\frac{1}{F_r}$, $\frac{1}{F_t}$, $\frac{1}{F_rF_t - \frac{1}{4}F_s^2}$ в области G.

После того как получена оценка для w, получение оценок для третьих производных функции z не представляет труда.

Теорема доказана.

Получение оценок для четвёртых и последующих производных решения $z(x, y)$ уравнения (1) может быть основано на теореме Шаудера, которая была приведена в дополнении I.

Пусть

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{6}$$

— уравнение в частных производных эллиптического типа в круге $\omega_\varepsilon(x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2)$, $z(x, y)$ — его решение. Дифференцируя уравнение (6), например по x, получим уравнение, которому удовлетворяет функция $u = z_x$:

$$\frac{A}{\Delta} u_{xx} + \frac{2B}{\Delta} u_{xy} + \frac{C}{\Delta} u_{yy} = \frac{D}{\Delta}, \tag{7}$$

где

$$A = F_r, \quad 2B = F_s, \quad C = F_t, \quad \Delta = AC - B^2,$$

D — некоторое выражение, построенное из производных первого порядка функции F и производных решения $z(x, y)$ до второго порядка.

Будем рассматривать коэффициенты уравнения (7) как известные функции x и y. Тогда в отношении уравнения (7) мы находимся в условиях применимости теоремы Шаудера. В самом деле, мы можем оценить постоянную Гёльдера относительно показателя α $(0 < \alpha < 1)$ для коэффициентов и правой части уравнения (7) в зависимости только от верхней грани модулей вторых производных функции F, третьих производных решения $z(x, y)$ и нижней грани дискриминанта уравнения $AC - B^2$ в круге ω_ε.

По теореме Шаудера можно указать оценку постоянной Гёльдера для вторых производных функции u (т. е. третьих производных z) относительно показателя $\alpha' < \alpha$ в круге $\omega_{\bar{\varepsilon}}$, целиком содержащемся в ω_ε. Итак, зная оценки для третьих производных решения, мы можем оценить наименьшие постоянные Гёльдера этих производных относительно любого показателя α $(0 < \alpha < 1)$ в круге $\omega_{\bar{\varepsilon}} \subset \omega_\varepsilon$, используя при этом только двукратную дифференцируемость функции F.

Дифференцируя уравнение (6), например дважды по x, мы получим уравнение такого же вида, как уравнение (7), для функции $v = z_{xx}$ с той лишь разницей, что теперь правая часть будет выражением, построенным из вторых производных функции F и третьих производных решения $z(x, y)$. Рассматривая снова коэффициенты полученного уравнения и его правую часть, как известные функции x и y, применяем теорему Шаудера. В результате получаем оценки для вторых производных функции v и их наименьших постоянных Гёльдера относительно показателя $\alpha'' < \alpha'$ в круге $\omega_{\bar{\bar{\varepsilon}}}$, целиком лежащем в круге $\omega_{\bar{\varepsilon}}$.

Так, шаг за шагом, могут быть получены оценки для производных любого порядка функции z и их наименьших постоянных Гёльдера относительно любого положительного показателя, меньшего единицы.

Окончательный результат может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 2. *Пусть*

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

— уравнение в частных производных эллиптического типа, $z(x, y)$ — его регулярное решение в круге ω_ε $(x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2)$.

Тогда внутри круга $\omega_{\bar{\varepsilon}}$ $(\bar{\varepsilon} < \varepsilon)$ можно указать оценку для производных k-го порядка решения $z(x, y)$ в зависимости только от верхней грани модуля z и его произ-

водных до второго порядка в круге ω_ε, *верхней грани величин*

$$\frac{1}{|F_r|},\quad \frac{1}{|F_t|},\quad \frac{1}{F_rF_t-\frac{1}{4}F_s^2},$$

верхней грани модулей производных функции F *до* s*-го порядка, причём* $s=3$ *при* $k=3$ *и* $s=k-1$ *при* $k>3$.

Более того, в зависимости от тех же величин могут быть указаны оценки для наименьших постоянных Гёльдера производных k*-го порядка функции* z *относительно любого показателя* α $(0<\alpha<1)$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, 1948.
2. Buseman u. Feller. Acta math., 66, 1936.
3. Либерман И. М. Геодезические линии на выпуклых поверхностях. ДАН, т. XXXII, № 5, 1941.
4. Александров А. Д. Гладкость выпуклой поверхности с ограниченной гауссовой кривизной. ДАН, т. XXXVI, № 7, 1942.
5. Александров А. Д. Существование и единственность выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной. ДАН, т. XXXV, № 5, 1942.
6. Бернштейн С. Н. Сообщения Харьковского Математического общества, т. XI, 1910.
7. Александров А. Д. Выпуклые многогранники, Гостехиздат, 1950.
8. Кон-Фоссен С. Э. Мат. сб., т. 7, вып. 2, 1946.
9. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформации поверхностей «в малом». Труды математического института им. В. А. Стеклова, т. XXX, 1949.
10. Лейбин А. С. Об изгибаемости выпуклых поверхностей с краем. Успехи математических наук, т. V, вып. 5, 1950.
11. Кон-Фоссен С. Э. Изгибание поверхностей «в целом». Успехи математических наук, вып. 1, 1936.
12. Погорелов А. В. Однозначная определённость выпуклых поверхностей. Труды математического института им. В. А. Стеклова, т. XXIX, 1949.
13. Оловянишников С. П. Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей. Мат. сб., т. 18 (60), вып. 3, 1946.
14. Schauder. J. Math. Zeitschr., т. 38.

Редактор *Л. А. Чудов.* Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*
Корректор *Г. Н. Нелидова.*

Подписано к печати 24/VII 1951 г. Бумага 84×108/$_{32}$.
2,88 бум. л. 9,43 печ. л. 10,42 уч.-изд. л.
45 000 тип. зн. в печ. л. Т-05286. Тираж 4000 экз.
Цена книги 6 р. 25 к. Переплет 50 коп. Заказ № 2666.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.